

Devoir Maison n°II -À propos d'intégrales

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

On définit l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

L'objectif du problème est de démontrer l'existence de trois réels a, b, c et d'une suite (ε_n) tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

1. Calculer I_0, I_1
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$
3. Déterminer le signe de I_n , pour tout entier naturel n .
4. Qu'en déduit-on pour la suite (I_n) ?
 - (a) Montrer : $\forall x \in [0; 1], 0 \leq e^{-2x} \leq 1$
 - (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
 - (c) Déterminer la limite de la suite (I_n)
5. En intégrant par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

6. En déduire la limite de la suite (nI_n) lorsque n tend vers $+\infty$
7. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))$
8. Donner finalement les valeurs de a, b, c

EXERCICE 2 - UN ENDOMORPHISME

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour tout f dans E , la fonction $T(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

1. Soit $f \in E$. Montrer que $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction de f
2. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E
3. T est-il surjectif?
4. Soit $f \in E$. Montrer que si f est paire (resp. impaire) alors $T(f)$ est paire (resp. impaire)
5. On note s la fonction de E définie par $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. T est-il un endomorphisme injectif?
6. On considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f_a de E définie par $f_a : t \mapsto e^{at}$
 - (a) Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$
 - (b) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(a) = \begin{cases} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(a)$.

- (c) Étudier le signe de $e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$ en fonction de a et en déduire les variations de φ
- (d) En déduire, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ telle que $T(f) = \lambda f$