

Devoir Maison n°10 - Déplacement d'un mobile (Edhec 2006)

On considère un mobile qui se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O . Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors à l'instant $n + 1$ il sera :

- sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec probabilité $\frac{k+1}{k+2}$
- sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n . On a donc : $X_0 = 0$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$ et on pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

On admet finalement : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

1. Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ puis donner la loi de X_1

Au départ le mobile se trouve en 0, et ne peut que rester sur place ou avancer de 1. Ainsi $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus, la probabilité que le mobile avance de 1 est $\frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$. X_1 suit une loi uniforme sur $[[1; 2]]$ / une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

2. Déterminer de même la loi de X_2

Je vous encourage à faire un arbre pour visualiser la situation. Puisqu'à chaque étape, le mobile peut avancer ou retourner en 0, en deux étapes le mobile a au plus avancé de 2, d'où $X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. De plus, d'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements associé à X_1 :

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

De même :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

On vérifie : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1$. On peut aussi économiser un calcul et utiliser cette relation pour trouver la dernière valeur

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [[0; n]]$

— Initialisation : pour $n = 0$, $X_0(\Omega) = \{0\}$

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n(\Omega) = [[0; n]]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $k \in [[0; n]]$ tel que $X_n(\omega) = k$. Ainsi, d'après l'énoncé, il y a deux possibilités au rang $n + 1$:

— $X_{n+1}(\omega) = 0$

— $X_{n+1}(\omega) = k + 1 \in [[1; n + 1]]$

Ainsi, $X_{n+1}(\Omega) = [[0; n + 1]]$ et la récurrence est établie.

4. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [[1; n]], \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k}{k+1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \quad (1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [[1; n]]$. On considère le système complet d'événements associé à X_{n-1} . D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X_{n-1} = j) \mathbb{P}_{(X_{n-1}=j)}(X_n = k)$$

Or, pour $j \neq k-1$, $\mathbb{P}_{(X_{n-1}=j)}(X_n = k) = 0$ (on ne peut qu'avancer de 1 ou aller en 0)

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \mathbb{P}_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \times \frac{k-1+1}{k-1+2} = \frac{k}{k+1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$$

- (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0; n]], \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$$

En utilisant la question précédente, raisonnons par récurrence sur n .

- Initialisation : pour $n = 0, k = 0, \mathbb{P}(X_0 = 0) = 1 \times \mathbb{P}(X_0 = 0) = 1 \times u_0$. La propriété est initialisée.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall k \in [0; n], \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$. Soit $k \in [0; n+1]$.
 - Si $k = 0$, alors $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = 1 \times \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = 1 \times u_{n+1}$.
 - Si $k \neq 0$, d'après la question précédente,

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1} \mathbb{P}(X_n = k-1) = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k-1+1} u_{n-(k-1)} = \frac{1}{k+1} u_{n+1-k}$$

La récurrence est établie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [0; n], \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$

(c) En remarquant que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) = 1$ (à justifier!), montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$

Puisque $X_n(\Omega) = [0; n]$, alors $(X_n = 0, \dots, X_n = n)$ est un système complet d'événements. Ainsi, $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) = 1$. Or, d'après la question précédente, $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n \frac{u_{n-k}}{k+1} = 1$$

En posant le changement d'indice $j = n - k$:

$$\sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$

Attention, pour les sommes, on garde les indices dans l'ordre croissant ($j = 0 \rightarrow n$ et pas $n \rightarrow 0$ comme on aurait écrit dans une intégrale)

(d) En utilisant les valeurs de u_0, u_1, u_2 , déterminer la valeur de u_3

$u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{5}{12}$. Or, grâce à la question précédente avec $n = 3$,

$$\frac{u_0}{4} + \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{1} = 1$$

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$u_3 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{5}{24} = \frac{24 - 6 - 4 - 5}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Penser à simplifier les fractions!

5. (a) En remarquant que la relation 1 peut se réécrire $(k+1)\mathbb{P}(X_n = k) = k\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [1; n]$, $(k+1)\mathbb{P}(X_n = k) = k\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$. Sommons cette égalité pour $k \in [1; n]$:

$$\sum_{k=1}^n (k+1)\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$$

i.e.

$$E(X_n) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j) = E(X_{n-1}) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = j)$$

Puisque $\sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X_n = j) = 1$, on obtient :

$$E(X_n) + (1 - \mathbb{P}(X_n = 0)) = E(X_{n-1}) + 1$$

i.e.

$$E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$$

- (b) Grâce à un télescopage, en déduire une écriture de
- $E(X_n)$
- en fonction des termes de la suite
- (u_n)

Sommons la relation précédente de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n E(X_k) - E(X_{k-1}) = \sum_{k=1}^n u_k$$

Par télescopage, puisque $E(X_0) = 0$:

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n u_k$$

- (c) Pour tout entier
- n
- non nul, montrer :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$

Déduire de ces deux résultats : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$

On a déjà montré $\sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n+1-j} = 1$. Au rang $n-1$ ($n-1 \in \mathbb{N}$), cela donne $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1$. Par ailleurs,

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$

En soustrayant les deux membres de l'égalité, on trouve :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \left(\frac{1}{n-j} - \frac{1}{n-j+1} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$$

- (d) Montrer que pour tout
- $n \in \mathbb{N}^*$
- , pour tout
- $j \in [0; n-1]$
- ,
- $\frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} \geq \frac{u_j}{(n-j)(n+1)}$
- .

Pour $j \geq 0$, $n-j+1 \leq n+1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{n-j+1} \geq \frac{1}{n+1}$. On multiplie ensuite par $\frac{u_j}{n-j}$, un nombre positif, et on obtient :

$$\frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} \geq \frac{u_j}{(n-j)(n+1)}$$

En déduire $u_n \geq \frac{1}{n+1}$

Ainsi :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} \geq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = \frac{1}{n+1} \times 1$$

Ainsi : $u_n \geq \frac{1}{n+1}$

- (e) Déterminer finalement la limite de
- $E(X_n)$
- .

Question hors programme pour le moment, mais pour justifier tout ce qu'on vient de faire ! On verra plus tard dans l'année

que $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$