

XVI. SEMAINE 16 : 2-6 FÉVRIER

Contenus :

1. Notion d'espace vectoriel. Espaces vectoriels de référence et propriétés de calcul.
2. Notion de sous-espace vectoriel. Intersection, somme, somme directe de sous-espaces vectoriels de E .
3. Notion de famille génératrice d'un ensemble. Notation $F = Vect(x_1, \dots, x_n)$. F est un sous-espace vectoriel de E .
4. Familles libres, familles liées, bases. Bases canoniques des espaces vectoriels de référence. $\mathbb{R}[x]$ n'admet pas de base.
5. Notion d'application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Vocabulaire (endo, iso, auto-morphisme, forme linéaire). Ensembles $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$, structure d'espace vectoriel. Ensembles $\mathcal{GL}(E, F)$, $\mathcal{GL}(E)$.
6. Composition et binôme de Newton pour des endomorphismes qui commutent.
7. Image et noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité par le noyau (et de la surjectivité par l'image, mais c'est la définition).
8. Projecteurs. Définition $x = x_F + x_G \mapsto x_F$, caractérisations par $p \circ p = p$ et par $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id_E)$.

Questions de cours :

1. Montrer que si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E , $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E . Contre-exemple pour $F \cup G$.
2. Définition de $F + G$. Montrer que si F, G sev de E , alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Montrer que $Vect(x_1, \dots, x_n) \subset Vect(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ et égalité si $x_{n+1} \in Vect(x_1, \dots, x_n)$.
4. Montrer que f (une application linéaire de E dans F) est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
5. Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
6. Soit $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi: \begin{matrix} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$
Montrer que ϕ est un projecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et déterminer ses espaces caractéristiques (noyau, image)