

Feuille d'exercices n°15

Exercice 1. Représenter ces ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
 $(0, 0) \notin F_1 : 0 + 0 \neq 1$. Ainsi, F_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
2. $F_2 = \mathbb{Z}^2$
 $(1; 0) \in \mathbb{Z}^2$ mais $1, 5 \times (1; 0) = (1, 5; 0) \notin \mathbb{Z}^2$. Ainsi, F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x = y\}$
 Oui ! Deux méthodes :
 — $(0, 0) \in F_3$ car $3 \times 0 = 0$ et si $(x, y), (x', y') \in F_3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $3(\lambda x + \mu x') = \lambda \times 3x + \mu \times 3x' = \lambda y + \mu y$
 donc F_3 est stable par combinaison linéaire
 — ou $F_3 = \{(x; 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; 3))$
4. $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
 $(1; 2) \in F_4$ (car $1 \leq 2$) et $-1 \times (1; 2) = (-1; -2)$. Or $-1 > -2$ et donc $(-1; -2) \notin F_4$. On en déduit que F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
5. $F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
 $(1; 0)$ et $(0; 1)$ sont dans F_5 car $1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$ et $(1; 0) + (0; 1) = (1; 1)$ et $1 \times 1 \neq 0$ donc $(1; 1) \notin F_5$.
 Ainsi, F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
6. $F_6 = \{(x - y, 5x + 6y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
 C'est bien un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, mais on peut même montrer que c'est en fait exactement $\mathbb{R}^2$! $((1; 5); (-1; 6))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$

Exercice 2. Pour les ensembles suivants, montrer que ce sont des sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence bien choisi. On pose $A \in_n (\mathbb{R})$ une matrice.

1. $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$
 On montre que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \times 0 = 0 \times A = 0$. Par ailleurs si $M_1, M_2 \in C_A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$(\lambda M_1 + \mu M_2)A = \lambda M_1 A + \mu M_2 A = \lambda A M_1 + \mu A M_2 = A(\lambda M_1 + \mu M_2)$$

Donc $\lambda M_1 + \mu M_2 \in C_A : C_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. L'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$

Notons-le F et montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- La fonction nulle est bornée (par 1, par exemple)
- Soient f, g des fonctions bornées et M_1, M_2 tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_1$ et $|g(x)| \leq M_2$.
 Soient a, b des réels.
 Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} |(af + bg)(x)| &= |af(x) + bg(x)| \\ &\leq |a||f(x)| + |b||g(x)| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq |a|M_1 + |b|M_2 \end{aligned}$$

Puisque $|a|M_1 + |b|M_2$ ne dépend pas de x , alors $af + bg$ est une fonction bornée.

Ainsi, F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3. L'ensemble des polynômes P tels que $P(0) = 0$

Appelons-le F et montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$

- Si P est le polynôme nul, alors $P(0) = 0$ donc $P \in F$
- Soient P_1, P_2 dans F et λ, μ des réels. Alors :

$$(\lambda P_1 + \mu P_2)(0) = \lambda P_1(0) + \mu P_2(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$

$$\lambda P_1 + \mu P_2 \in F$$

Ainsi, F est un sev de $\mathbb{R}[x]$

4. L'ensemble des polynômes divisibles par $x^2 - 1$

De même avec $P_1 = (x^2 - 1)Q_1$, $P_2 = (x^2 - 1)Q_2$ et $\lambda P_1 + \mu P_2 = (x^2 - 1)(\lambda Q_1 + \mu Q_2)$

Exercice 5. Quels sont les réels m tels que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des matrices $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

On cherche pour quelles valeurs de m le système suivant d'inconnues $a, b \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a - b = 1 \\ 2a + 4b = m \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1] \begin{cases} a + b = 3 \\ -4b = -8 \\ 2b = m - 6 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2] \begin{cases} a + b = 3 \\ b = 2 \\ 2b = m - 6 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \begin{cases} a + b = 3 \\ b = 2 \\ 0 = m - 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $m = 10$, le système a une solution : $b = 2$ et $a = 1$. Si $m \neq 10$, le système n'a pas de solution.

Exercice 7 (Rang). Soit $E = \mathbb{R}^3$. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si non, extraire une sous-famille libre avec le plus de vecteurs possibles. Indiquer le nombre de vecteurs de leur plus grande sous-famille libre.

1. $\mathcal{F}_1 = ((2, 0, 3), (1, 7, 2))$

La famille est libre car il s'agit de deux vecteurs non colinéaires.

2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 6), (0, 2, 1))$

La famille n'est pas libre : le dernier vecteur est égal à 2 fois le deuxième vecteur plus $-\frac{1}{2}$ fois le troisième vecteur.

La plus grande sous-famille libre est celle composée des trois premiers vecteurs. Montrons qu'elle est effectivement libre : prenons a, b, c des réels tels que $a(1; 2; 3) + b(0; 1; 2) + c(0; 0; 6) = (0; 0; 0)$. Alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 3a + 2b + 6c = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 2b + 6c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille est effectivement libre.

3. $\mathcal{F}_3 = ((-5, -2, 1), (0, 1, 4), (-5, 0, 9))$

Le troisième vecteur est égal au premier plus deux fois le deuxième. La famille n'est donc pas libre. En revanche, la sous-famille composée des deux premiers vecteurs est une famille libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

◇

Exercice 10. Les fonctions sin et cos forment-elles une famille libre ?

Soient λ, μ tels que $\lambda \sin + \mu \cos = 0$. Évaluons en 0 :

$$\lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = 0$$

Puisque $\sin(0) = 0$, on trouve : $\mu \times 1 = 0$ donc $\mu = 0$. En évaluant en $\frac{\pi}{2}$:

$$\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on trouve : $\lambda \times 1 = 0$ donc $\lambda = 0$.

On a trouvé $\lambda = \mu = 0$ et donc la famille $(\sin, \cos)$ est libre.

Exercice 14 (Fonctions affines). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les ensembles suivants sont-ils des s.e.v. de E ? Si oui, les écrire sous la forme d'espaces engendrés par une famille de vecteurs.

1. $F_1 = \{x \mapsto ax \mid a \in \mathbb{R}\}$
 $F_1 = \text{Vect}(x \mapsto x) = \text{Vect}(id)$. C'est un sous-espace vectoriel de E .
2. $F_2 = \{x \mapsto ax + 1 \mid a \in \mathbb{R}\}$
 F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de E car ne contient pas la fonction nulle.
3. $F_3 = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
 $F_3 = \text{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto 1) = \text{Vect}(id, 1)$. C'est un sous-espace vectoriel de E .

On admet que l'ensemble $G = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et un sous-e.v. de E . Montrer que $F_3 \oplus G = E$.
 Soit $f \in E$. On cherche $f_1 \in F_3, f_2 \in G$ tels que $f = f_1 + f_2$. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : supposons que f_1, f_2 existent. Alors $f(0) = f_1(0) + f_2(0) = f_1(0)$ car $f_2(0) = 0$. De même $f(1) = f_1(1) + f_2(1) = f_1(1)$.

Écrivons f_1 sous la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$f_1(0) = b = f(0) \quad \text{et} \quad f_1(1) = a + b = f(1)$$

On trouve $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. Ainsi :

$$f_1(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) \quad \text{et} \quad f_2(x) = f(x) - f_1(x)$$

Synthèse : posons $f_1(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ et $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. f_1 est clairement affine donc dans F_3 . En évaluant f_2 en 0 et en 1 on trouve :

$$f_2(0) = f(0) - f_1(0) = f(0) - f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(1) = f(1) - f_1(1) = f(1) - (f(1) - f(0) + f(0)) = 0$$

Ainsi, $f_2 \in G$.

Finalement, $f_1 + f_2 = f_1 + f - f_1 = f$. On a montré l'égalité demandée.

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que F, G et H sont en somme directe si et seulement si $(F \cap G = \{0\})$ et $(F + G) \cap H = \{0\}$.

Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que F, G, H sont en somme directe, c'est-à-dire **que si $x \in F + G + H$, l'écriture $x = x_F + x_G + x_H$ est unique.**

Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = x + 0 + 0$ avec $x \in F, 0 \in G, 0 \in H$ et $x = 0 + x + 0$ avec $0 \in F, x \in G, 0 \in H$. Par unicité de l'écriture : $x = 0$. Ainsi : $F \cap G = \{0\}$.

Soit $x \in (F + G) \cap H$. Puisque $x \in F + G$, il existe $x_F \in F, x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$. Alors $x = x_F + x_G + 0$ avec $0 \in H$. Par ailleurs, $x = 0 + 0 + x$ avec $0 \in F, 0 \in G, x \in H$. Par unicité de l'écriture, $x = 0$. Ainsi $(F + G) \cap H = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Supposons $F \cap G = \{0\}$ et $(F + G) \cap H = \{0\}$ et montrons que F, G, H sont en somme directe. Soient $x_F, x'_F \in F, x_G, x'_G \in G, x_H, x'_H \in H$ tels que :

$$x_F + x_G + x_H = x'_F + x'_G + x'_H$$

i.e. :

$$(x_F - x'_F + x_G - x'_G) = x'_H - x_H$$

Le premier membre est dans $F + G$ (stabilité par combinaison linéaire) et le second dans H pour la même raison. Ainsi, les deux membres sont dans $(F + G) \cap H = \{0\}$ et donc $x_F - x'_F + x_G - x'_G = x'_H - x_H = 0$.

On trouve $x_H = x'_H$. Par ailleurs,

$$x_F - x'_F = x'_G - x_G$$

Les deux membres sont dans $F \cap G = \{0\}$ et donc $x_F - x'_F = x'_G - x_G = 0$. On en déduit $x_F = x'_F$ et $x_G = x'_G$.
 F, G, H sont bien en somme directe. Nous avons montré l'équivalence.