

Devoir Maison n°II -À propos d'intégrales

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

On définit l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

L'objectif du problème est de démontrer l'existence de trois réels a, b, c et d'une suite (ε_n) tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

1. Calculer I_0, I_1

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^0 e^{-2x} dx = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-x) e^{-2x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} (1-x) e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \times -\frac{1}{2} e^{-2x} dx \text{ en intégrant par parties} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} (e^{-2} - 1) \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + e^{-2}) \end{aligned}$$

2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $1-x \leq 1$ et donc $(1-x)^{n+1} \leq (1-x)^n$. En multipliant par e^{-2x} , qui est un nombre positif, on obtient :

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$$

Par croissance de l'intégrale, la suite (I_n) est donc décroissante.

3. Déterminer le signe de I_n , pour tout entier naturel n .

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0; 1]$, on a $(1-x)^n \geq 0$ et $e^{-2x} \geq 0$, par positivité de l'intégrale $I_n \geq 0$.

4. Qu'en déduit-on pour la suite (I_n) ?

Puisque (I_n) est minorée et décroissante, la suite (I_n) converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$.

5. (a) Montrer : $\forall x \in [0; 1], 0 \leq e^{-2x} \leq 1$

L'exponentielle de n'importe quel nombre est un réel strictement positif. Par ailleurs, par croissance de l'exponentielle, si $x \geq 0$, i.e. $-2x \leq 0$, alors $e^{-2x} \leq 1$.

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

On multiplie par $(1-x)^n$ qui est un nombre positif. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n dx = \int_1^0 u^n (-du) = \int_0^1 u^n du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

On a posé le changement de variable (affine) : $u = 1-x$

(c) Déterminer la limite de la suite (I_n)

Par théorème des gendarmes : $I_n \rightarrow 0$

6. En intégrant par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} 2e^{-2x} dx \\ &= \left[(1-x)^{n+1} \times (-e^{-2x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) \times (-1) \times (1-x)^n \times (-e^{-2x}) dx \\ &= 1 - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= 1 - (n+1)I_n \end{aligned}$$

7. En déduire la limite de la suite (nI_n) lorsque n tend vers $+\infty$

On déduit de la question précédente :

$$nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$$

Puisque $I_n \rightarrow 0$, alors $nI_n \rightarrow 1 - 0 - 2 \times 0 = 1$

8. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))$

On garde la même formule de récurrence. On sait :

$$nI_n - 1 = I_n - 2I_{n+1}$$

Ainsi,

$$n(nI_n - 1) = nI_n - 2nI_{n+1} = nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - 2 + 0 = -1$$

9. Donner finalement les valeurs de a, b, c

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : supposons qu'il existe a, b, c et une suite (ε_n) de limite nulle tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n$. Alors :

- $I_n \rightarrow a$. Par unicité de la limite, $a = 0$
- $nI_n = b + \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n \rightarrow b$. De même, $b = 1$
- $n(nI_n - 1) = c + \varepsilon_n \rightarrow c$. Ainsi, $c = -1$

Synthèse : en posant $a = 0, b = 1, c = -1$ et $\varepsilon_n = n^2 \left(I_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$, on a bien $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n$, et :

$$\varepsilon_n = n(nI_n - 1) + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Avec le nouveau vocabulaire, on a montré :

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et en particulier $I_n \sim \frac{1}{n}$

EXERCICE 2 - UN ENDOMORPHISME

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour tout f dans E , la fonction $T(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

1. Soit $f \in E$. Montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction de f

Puisque f est continue, l'intégrale est bien définie et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^{x-1} f(t) dt \right)$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $T(f)$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f)'(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$$

2. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E

On a montré que $T(f)$ était de classe $\mathcal{C}^1$, donc en particulier continue. Ainsi, T est bien définie de E dans E . Par ailleurs, T est linéaire par linéarité de l'intégrale. On en déduit que $T \in \mathcal{L}(E)$

3. T est-il surjectif?

Non! Puisqu'on a montré que $T(f)$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$, on sait que par exemple la fonction valeur absolue (dans E mais pas $\mathcal{C}^1$) n'admet pas d'antécédents par T .

4. Soit $f \in E$. Montrer que si f est paire (resp. impaire) alors $T(f)$ est paire (resp. impaire)

— Supposons d'abord f paire. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(f)(-x) &= \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{-x+1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{x+1}^{x-1} f(-s)(-ds) \text{ en posant } s = -t \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(s) ds \\ &= T(f)(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $T(f)$ est paire.

— Supposons maintenant f impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(f)(-x) &= \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{-x+1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{x+1}^{x-1} f(-s)(-ds) \text{ en posant } s = -t \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(s) ds \text{ (un changement de signe pour les bornes, un pour } f \text{ impaire, un pour le } -ds) \\ &= -T(f)(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $T(f)$ est impaire.

5. On note s la fonction de E définie par $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. T est-il un endomorphisme injectif?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(s)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} s(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \sin(\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} (-\cos(\pi t)) \right]_{x-1}^{x+1} \\ &= \frac{1}{2\pi} (\cos(\pi(x-1)) - \cos(\pi(x+1))) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\cos(\pi x - \pi) - \cos(\pi x + \pi)) \\ &= \frac{1}{2\pi} (-\cos(\pi x) + \cos(\pi x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $T(s) = 0$. Puisque s n'est pas la fonction nulle mais que $s \in \ker(T)$, T n'est pas injectif.

6. On considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f_a de E définie par $f_a : t \mapsto e^{at}$

(a) Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$

Soit $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(f_a)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f_a(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} e^{at} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} e^{at} \right]_{x-1}^{x+1} \\ &= \frac{e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}}{2a} \\ &= e^{ax} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} \end{aligned}$$

(b) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(a) = \begin{cases} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(a)$.

On commence par remarquer que φ est clairement dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables. Étudions la limite de φ en 0 : pour $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2a} \\ &= \frac{e^a - 1}{2a} + \frac{1 - e^{-a}}{2a} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^a - 1}{a} + \frac{e^{-a} - 1}{-a} \right) \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 = \varphi(0) \end{aligned}$$

On utilise la formule de limite classique du cours $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 0$, une fois avec $u = a$ et une fois avec $u = -a$.
Pour $a \neq 0$,

$$\varphi'(a) = \frac{2a(e^a + e^{-a}) - 2(e^a - e^{-a})}{(2a)^2} = \frac{e^a(a - 1) + e^{-a}(a + 1)}{2a^2}$$

(c) Étudier le signe de $e^a(a - 1) + e^{-a}(a + 1)$ en fonction de a et en déduire les variations de φ

On sait que $2a^2 \geq 0$. Pour étudier le signe de $\varphi'(a)$, il suffit donc d'étudier le signe de $e^a(a - 1) + e^{-a}(a + 1)$.

Posons $g(a) = e^a(a - 1) + e^{-a}(a + 1)$: g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(a) = e^a(a - 1 + 1) + e^{-a}(1 - (a + 1)) = a(e^a - e^{-a})$$

Lorsque $a \geq 0$, alors $e^a - e^{-a} \geq 0$ et le produit est positif. Lorsque $a \leq 0$, alors $e^a - e^{-a} \leq 0$ et le produit est négatif. On en déduit que dans tous les cas, $g'(a) \geq 0$. Ainsi, g est croissante et $g(0) = 0$. On en déduit que g est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Finalement : φ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit (vous pouvez faire un vrai tableau de variations...) que φ admet un minimum en $\varphi(0) = 1$. Par ailleurs,

$$\varphi(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } \varphi(a) \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} +\infty$$

(d) En déduire, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ telle que $T(f) = \lambda f$

Soit $\lambda \in [1; +\infty[$. D'après le tableau de variations de φ , λ admet au moins un antécédent a par la fonction φ . Or, d'après les questions précédentes,

$$T(f_a) = \varphi(a)f_a = \lambda f_a$$

Puisque f_a n'est jamais la fonction nulle, on a bien le résultat demandé.

On dit (voir 2ème année) que f_a est un **vecteur propre** de T