

Feuille d'exercices n°17

Exercice 11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^9 + x^8$

- Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution x_n dans $[1; +\infty[$.
 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (somme de deux fonctions strictement croissantes). Par ailleurs, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in [1; +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$.

- Montrer :

$$\forall x \geq 1, x^9 \leq x^9 + x^8 \leq 2x^9$$

Pour $x \geq 1$, $0 \leq x^8 \leq x^9$. Ainsi, $x^9 \leq x^9 + x^8 \leq x^9 + x^9 = 2x^9$

- En déduire :

$$\forall n \geq 2, \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{9}} \leq x_n \leq n^{\frac{1}{9}}$$

Soit $n \geq 2$. On déduit de la question précédente : pour $x = x_n$: $f(x_n) \leq 2x_n^9$, i.e. $n \leq 2x_n^9$ et donc $x_n^9 \geq \frac{n}{2}$. Puisque la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{9}}$ est croissante, on en déduit : $x_n \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{9}}$.

Par ailleurs, on trouve également : $f(x_n) \geq x_n^9$ i.e. $n \geq x_n^9$. Par croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{9}}$, on trouve : $x_n \leq n^{\frac{1}{9}}$. Ainsi :

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{9}} \leq x_n \leq n^{\frac{1}{9}}$$

- Montrer alors que $x_n^8 = o(n)$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^8$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{8}{9}} \leq x_n^8 \leq n^{\frac{8}{9}}$$

En divisant par n (qui est strictement positif) :

$$\frac{1}{2^{\frac{8}{9}} n^{\frac{1}{9}}} \leq \frac{x_n^8}{n} \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{9}}}$$

Par théorème des gendarmes, on trouve donc : $\frac{x_n^8}{n} \rightarrow 0$, i.e. $x_n^8 = o(n)$

- En déduire un équivalent simple de x_n

Attention, on ne peut rien déduire de simplement l'information $x_n^8 = o(n)$. Mais puisque $x_n^9 + x_n^8 = n$, on trouve : $x_n^9 = n + o(n)$, i.e. $x_n^9 \sim n$, et en passant à la puissance $\frac{1}{9}$:

$$x_n \sim n^{\frac{1}{9}}$$

Exercice 15. Soient $(u_n), (v_n)$ des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- Montrer que $(e^{u_n} \sim e^{v_n}) \iff (u_n - v_n) \rightarrow 0$

Puisque la fonction exponentielle ne s'annule jamais :

$$\begin{aligned} e^{u_n} \sim e^{v_n} &\iff \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \rightarrow 1 \\ &\iff \exp(u_n - v_n) \rightarrow 1 \\ &\iff u_n - v_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

- Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?

Non : on a un contre exemple dans le cours : $n+1 \sim n$, mais e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n , puisque $n+1 - n = 1$ ne tend pas vers 0.

Exercice 16 (Gendarmes mobiles). Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et a, b, f des fonctions définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathcal{V}, 0 < a(x) \leq f(x) \leq b(x)$$

et $a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$. Montrer :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$$

Puisque a ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$, on déduit pour tout $x \in \mathcal{V}$:

$$1 \leq \frac{f(x)}{a(x)} \leq \frac{b(x)}{a(x)}$$

Or, puisque $a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$, alors $\frac{b(x)}{a(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\longrightarrow} 1$. Par théorème des gendarmes, on a donc : $\frac{f(x)}{a(x)} \rightarrow 1$. Ainsi :
 $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$ (transitivité)