

Feuille d'exercices n°17

Calculs de limites et d'équivalents

Exercice 1 (À connaître). Déterminer la limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$

Exercice 2 (Niveau 1). Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $(x^2 - 5x + 3x^3)e^x$ en $+\infty$ | 6. $\sin x + e^x$ en $+\infty$ |
| 2. $(x^2 - 5x + 3x^3)e^x$ en 0 | 7. $\frac{x+\ln x}{x^2+2}$ en $+\infty$ |
| 3. $3\sqrt{x} + 2x$ en $+\infty$ | 8. $\ln(x + \frac{1}{x})$ en $+\infty$ |
| 4. $\sqrt{2x^3 + 2 + \frac{1}{x}}$ en $+\infty$ | 9. $u_n = \frac{n!+e^n}{2^n+3^n}$ |
| 5. $\sin x + e^x$ en 0 | 10. $u_n = \frac{(2n+1)(e^n-n)}{\sqrt{n}+\ln n}$ |

Exercice 3 (Niveau 2). Même question.

- | | |
|--|---|
| 1. $\ln(1 + \sin x)$ en 0 | 5. $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$ |
| 2. $\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$ en 0 | 6. $u_n = \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} - 2$ |
| 3. $e^x + x - 1$ en 0 | 7. $u_n = n^2 \sin(\arctan(\frac{1}{n}))$ |
| 4. $x(e^{\frac{1}{x}} - \cos(\frac{1}{x}))$ en $+\infty$ | 8. $u_n = \sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ |

◇ **Exercice 4.** Étudier :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^3/2) - 1}{\tan^3(x/5)}$$

Exercice 5. Soit (S_n) la suite définie par : $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$
2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \frac{1}{2}\right)$$

3. En déduire un équivalent de la suite (S_n)

Exercice 6 (Équivalent ailleurs qu'en 0 ou $\pm\infty$).

1. Donner un équivalent simple de $\ln(x)$ quand $x \rightarrow 1$
2. Étudier la limite quand x tend vers 1 de $\frac{\ln(x)}{x^2-1}$
3. Donner un équivalent simple de $x \mapsto \ln(\cos(x))$ en $\frac{\pi}{2}^-$
4. Étudier $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$

◇ **Exercice 7.** On pose $f : x \mapsto \ln(x^3 - 12x + 16)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Donner des équivalents (simples) de f en 0, 2, $+\infty$

Exercice 8 (Des $\ln$ dans tous les sens). Donner des équivalents simples en $+\infty$ de :

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| 1. $\sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ | 3. $\ln(e^x + e^{-x})$ |
| 2. $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$ | 4. $\ln(1 + e^{-x})$ |

◇ **Exercice 9.** Soit P une fonction polynômiale. Déterminer un équivalent de $P(x)$ en 0, $+\infty$, $-\infty$

«Applications»

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$
2. $f_2(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$
3. $f_3(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^{\frac{3}{2}}}$
4. $f_4(x) = (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$

Exercice 11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^9 + x^8$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution x_n dans $[1; +\infty[$
2. Montrer :

$$\forall x \geq 1, x^9 \leq x^9 + x^8 \leq 2x^9$$

3. En déduire :

$$\forall n \geq 2, \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{9}} \leq x_n \leq n^{\frac{1}{9}}$$

4. Montrer alors que $x_n^8 = o(n)$
5. En déduire un équivalent simple de x_n

Exercice 12. On considère la fonction définie par $[0; 1[$ par $f(x) = \frac{2x}{\pi} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante puis qu'elle converge vers un réel qu'on déterminera.
3. Déterminer un équivalent simple de (x_n) .

Résultats théoriques

Exercice 13. On se donne $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites.

1. Montrer que si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = o(w_n)$
2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$

Exercice 14. Soient $(u_n), (v_n)$ des suites.

1. Montrer que $(e^{u_n} \sim e^{v_n}) \iff (u_n - v_n) \rightarrow 0$
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?

Exercice 15 (Gendarmes mobiles). Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et a, b, f des fonctions définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathcal{V}, 0 < a(x) \leq f(x) \leq b(x)$$

et $a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$. Montrer :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$$

◇

Exercice 16 (Un peu comme les degrés étagés). On se donne une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas «nulles à partir d'un certain moment» * vérifiant en $+\infty$:

$$f_1 = o(f_2), \quad f_2 = o(f_3), \quad \dots, \quad f_{n-1} = o(f_n)$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ forme une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

* C'est-à-dire que pour aucune des fonctions f_k on a : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f_k(x) = 0$