

CHAPITRE 17 : ÉTUDES ASYMPTOTIQUES

ÉTUDES LOCALES

Analyse 6

Objectif : agrandir notre boîte à outils pour lever des indéterminations sur des limites!

À la fin du chapitre nous saurons trouver la limite de :

$$n^2 \sin \left(\tan \left[\frac{3}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) \right] \right)$$

I. CAS DES SUITES

1. Croissances comparées

Propriété 1 (Lemme utile). Soit (u_n) une suite telle que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$ et $0 \leq \ell < 1$, alors $u_n \rightarrow 0$. Si $\ell > 1$, alors $|u_n| \rightarrow +\infty$ et donc (u_n) diverge.

Démonstration. Comparaison avec une suite géométrique.

Limites usuelles

- **Suites «puissances» :**

Si $\alpha > 0$, $n^\alpha \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \rightarrow 0$

Savoir gérer l'écriture n^α avec $\alpha < 0$

- **Suites géométriques :**

— Si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$

— Si $-1 < q < 1$, $q^n \rightarrow 0$

— Si $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$

— Si $q < -1$, (q^n) diverge

- **Croissance comparée log/puissance :**

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} \rightarrow 0$ et $\frac{n^\alpha}{\ln(n)^\beta} \rightarrow +\infty$

- **Croissance comparée puissance/géométrique :**

Si $\alpha > 0$ et $q \in]-1; 1[$,

$$q^n n^\alpha \rightarrow 0$$

- **Croissance comparée géométrique/factorielle :**

Si $q \in \mathbb{R}$,

$$\frac{q^n}{n!} \rightarrow 0$$

2. Suites négligeables

Définition 2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que u_n est négligeable devant v_n , et on note $u_n = o(v_n)$ si :

$$\exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \varepsilon_n v_n \text{ et } \varepsilon_n \rightarrow 0$$

ou $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang seulement.

Propriété 3. Si (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), $u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$

Démonstration.

Exemples.

- $\frac{1}{n} = o(1)$. Peut-on trouver d'autres suites négligeables devant 1 ?
- $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- $n = o(n^2)$. Plus généralement : si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$

Remarque. Sur la notation $u_n = o(v_n)$: $n = o(n^3)$, $n^2 = o(n^3)$ mais ...

Propriété 4 (Transitivité). Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$

Propriété 5 (Multiplication par un réel). Soient (u_n) et (v_n) deux suites et $\lambda \neq 0$

• Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = o(\lambda v_n)$

• Si $u_n = o(v_n)$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$

Remarque. On a alors $o(65940) = o(1)$ et plus généralement on se débarrassera des constantes multiplicatives dans o

Propriété 6 (Somme de suites). Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites telles que $v_n = o(u_n)$ et $w_n = o(u_n)$. Alors,

$$v_n + w_n = o(u_n)$$

On peut retenir cette propriété sous la forme : « $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$ »

Remarque. Si (u_n) est fixé, on a en fait écrit que l'ensemble des suites négligeables devant u_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a déjà parlé de l'ev. des suites qui tendent vers 0 : $o(1)$

Remarque. Cette propriété n'est **pas** : $w_n = o(u_n), z_n = o(v_n)$ implique $w_n + z_n = o(u_n + v_n)$. Contre-exemple ! Retenir que la **somme** d'équivalents se passe en général mal.

Propriété 7 (Produit de suites). Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (z_n)$ quatre suites telles que $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(z_n)$. Alors

$$u_n v_n = o(w_n z_n)$$

Propriété 8 (Produit par une suite). Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$

Exemple. On peut donc écrire des choses comme $n(3 + o(1)) = 3n + o(n)$

3. Croissances comparées

Propriété 9 (Reformulation). Les croissances comparées de début du chapitre se réécrivent :

- Si $\alpha, \beta > 0$, $(\ln(n))^\beta = o(n^\alpha)$ • Si $q \in]-1; 1[$ et $\alpha > 0$, $q^n = o(n^{-\alpha})$ • Si $q \in \mathbb{R}$, $q^n = o(n!)$

Cette liste nous permet de nous créer une échelle dans les vitesses de convergences : notation «de Hardy» (désuète) pour $\alpha > 0$ et $q > 1$:

$$(\ln n)^\beta < n^\alpha < q^n < n!$$

4. Suites équivalentes

♥ **Définition 10.** On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on note $u_n \sim v_n$, si :

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, c'est équivalent à : $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$

Remarque. $u_n \sim v_n$ représente le fait que (u_n) et (v_n) soient proches, mais **pas** au sens $u_n - v_n \rightarrow 0$. Exemples.

Vrai / Faux.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. On peut déduire :

- | | |
|---|---|
| 1. (u_n) et (v_n) ont le même sens de variation | 4. (u_n) et (v_n) ont le même signe à partir d'un certain rang |
| 2. (u_n) et (v_n) ont la même limite | 5. Si (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, (v_n) non plus. |
| 3. (u_n) et (v_n) ont le même signe | 6. Si (u_n) est bornée, (v_n) est bornée |

Proposez vos propres conjectures !

Démonstration.

Propriété 11 (RST). Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. On a les propriétés suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. Réflexivité : $u_n \sim u_n$ | 2. Symétrie : Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$ | 3. Transitivité : Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$ |
|--|---|---|

Démonstration.

♠ *Remarque.* La relation $\Leftrightarrow$ a les mêmes propriétés. Ça tombe bien, puisque les deux s'appellent **équivalences**

- $n \sim_{+\infty} n+1$

Exemples.

- $n^5 + 15n + 18 + \sin(n) - \frac{187}{n^2} \sim_{+\infty} n^5$
- Pour $\ell \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $[u_n \rightarrow \ell] \iff [u_n \sim \ell]$

Remarque. Dans le deuxième exemple : on retrouve d'idée de terme prépondérant utilisée dans les calculs de limites. Dans le dernier : la notion d'équivalent permet de **préciser** celle de limites : $u_n \rightarrow \ell$, mais comment ?

⚠ On n'écrit JAMAIS : ÉQUIVALENT À ZÉRO

Exemple. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout n par les formules suivantes sont équivalentes :

$$u_n = \frac{n}{2n^3 + 5n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2n^2}$$

Propriété 12 (Produits, quotients). Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim z_n$, alors

$$u_n v_n \sim w_n z_n$$

Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim z_n$, et si (w_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang) alors

$$\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{z_n}$$

Démonstration.

Propriété 13 (Puissances). Si $u_n \sim v_n$ et $p \in \mathbb{N}$, alors

$$u_n^p \sim v_n^p$$

Si de plus (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Démonstration. Remarque : l'hypothèse de positivité est nécessaire pour que u_n^α ait un sens !

Exemple (Racine carrée). Cas particulier : si $u_n \sim v_n$ sont deux suites strictement positives, alors

$$\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$$

♡ *Remarque.* Ce n'est pas le cas pour toutes les fonctions (à la place de la racine carrée) ! Exemple de (e^{n+1}) et (e^n)

Exercice.

1. Montrer (on pourra dériver) :

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

2. Montrer : si (u_n) est strictement positive et $u_n \rightarrow 0$, alors $\sin(u_n) \sim u_n$

Remarque. Comme pour les négligeabilités, $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ n'implique pas $u_n + w_n \sim v_n + z_n$

II. ÉTUDES DE FONCTIONS

1. Rappels de limites

Propriété 14 (Croissance comparée à l'infini).

- Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $\frac{\ln(x)^b}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- Si $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, $|x|^a e^{bx} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
- Si $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, $|x|^a e^{-bx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- Les autres cas ne sont pas des formes indéterminées.

Propriété 15 (Croissance comparée en 0). $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

Propriété 16 (Limites usuelles : taux d'accroissements).

$$\begin{array}{ll}
\bullet \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 & \bullet \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\
\bullet \frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 & \bullet \frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \\
\bullet \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 & \bullet \frac{\tan(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1
\end{array}$$

Démonstration. Pour certaines limites qui n'ont pas encore été vues en classe.

2. Fonctions négligeables, fonctions équivalentes

Définition 17 (Voisinage). Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle contenant a . Si $a = +\infty$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $[M; +\infty[$ et si $a = -\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $] -\infty; M]$, avec $M \in \mathbb{R}$

Cadre : dans toute la suite et les exercices, on s'intéresse à des fonctions définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Définition 18. Par analogie avec les suites, on définit pour des fonctions f et g :

- f négligeable devant g en a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \text{ si } \left(\exists \varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \text{ et } f(x) = \varepsilon(x)g(x) \right)$$

ou si g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

- f équivalente à g en a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$$

ou si g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

Propriété 19 (Calcul). Toutes les propriétés de calcul se transposent! Voir dans la première partie : transitivité, + opérations sur les o (sommes, multiplications, ...), RST de l'équivalence, produit, quotient, puissances.

♣ *Exercice.* Réécrire ces propriétés pour des fonctions.

Remarque. Quelle est alors la différence entre suites et fonctions? Comme pour les limites : on ne s'intéresse plus seulement à ce qui se passe en $+\infty$, mais aussi en $-\infty$ et au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

3. Équivalents classiques

♡ Les limites connues se relisent sous forme d'équivalences/négligeabilités :

Propriété 20.

- Si $a > 0$, $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^a)$
- Si $b > 0$, $|x|^a \underset{+\infty}{=} o(e^{bx})$

Propriété 21.

- $\ln(1+x) \sim_0 x$
- $e^x - 1 \sim_0 x$
- $\sin(x) \sim_0 x$
- $1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$
- $\tan(x) \sim_0 x$
- $\arctan(x) \sim_0 x$

Remarque. Pour une fonction au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on se ramènera le plus souvent en 0 en posant $x = a + u$

Exemple. Équivalent en 1 : $\ln(x) \sim_1 x - 1$

4. Nouvelles propriétés de calcul

Propriété 22 (Composition). Si I est un intervalle, $h : I \rightarrow \mathcal{V}$ et $f, g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ (resp. $f \underset{a}{\sim} g$), et h est une fonction définie sur un voisinage de b telle que $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$, alors

$$f \circ h \underset{b}{=} o(g \circ h)$$

respectivement :

$$f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$$

Remarque. On peut donc composer à **droite** mais jamais à gauche! Cf. contre-exemple pour les suites!

♥ **Exemple.** Un autre équivalent classique : si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$

Exercice. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$

Propriété 23 (Lien entre fonctions et suites). Si u_n est une suite vérifiant : $u_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et que f, g sont deux fonctions définies sur un voisinage de a vérifiant $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ (resp. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$), alors

$$f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(g(u_n))$$

resp. $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(u_n)$

Exemples. Déterminer un équivalent simple de $\ln(n+1) - \ln(n)$

Exercice. Déterminer la limite en $+\infty$ de la suite u_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = n^2 \sin \left(\tan \left[\frac{3}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) \right] \right)$$

RÉCAPITULATIF

Produit, quotient : OUI

Somme, composition : ATTENTION

Équivalent à zéro : NON

Des petits dictons à garder en tête : o est gourmand, équivalents de l'extérieur vers l'intérieur comme des poupées russes

Dans le doute : revenir aux o voire à la définition!