

Devoir Maison n°12 - Algèbre linéaire

DANS $\mathbb{R}^4$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 1, 1), \quad v_2 = (3, 2, -1, 4), \quad v_3 = (-1, -9, 7, -3)$$

On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = y = z = -t\}$

1. (a) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?

On peut chercher une combinaison linéaire «à l'œil nu» ou poser a, b, c des réels tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, i.e. :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ -a + 2b - 9c = 0 \\ a - b + 7c = 0 \\ a + 4b - 3c = 0 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1] \begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ 5b - 10c = 0 \\ -4b + 8c = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{cases} a = -3b + c \\ b = 2c \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = 2c \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'a pas une unique solution, la famille n'est donc pas libre. Avec $c = -1$, on trouve par exemple $a = 5$ et $b = -2$, c'est-à-dire : $5v_1 - 2v_2 = v_3 : v_3 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$

- (b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de F

Puisque $v_3 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$, alors $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$. Ainsi, (v_1, v_2) est une famille génératrice de F et par ailleurs c'est une famille libre puisqu'elle est composée de deux vecteurs non colinéaires. $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de F .

2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une base.

Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in G &\iff 2x = y = z = -t \\ &\iff (x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{2}t; -t; -t; t\right) \\ &\iff (x, y, z, t) = t \left(-\frac{1}{2}; -1; -1; 1\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $G = \text{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}; -1; -1; 1\right)\right)$. G est donc un espace vectoriel et comme le vecteur est non nul, $\left(-\frac{1}{2}; -1; -1; 1\right)$ est une base de G .

3. Montrer que F et G sont en somme directe.

Soit $(x; y; z; t) \in F \cap G$. Il existe alors a, b tels que $(x; y; z; t) = av_1 + bv_2$ et c tel que $(x; y; z; t) = c\left(-\frac{1}{2}; -1; -1; 1\right)$. Alors,

$$a(1; -1; 1; 1) + b(3; 2; -1; 4) - c\left(-\frac{1}{2}; -1; -1; 1\right) = (0; 0; 0; 0)$$

On résout le système et on trouve $a = b = c = 0$, et donc $(x; y; z; t) = 0v_1 + 0v_2 = 0$. F et G sont bien en somme directe.

DANS UN ESPACE DE DIMENSION INFINIE

On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et **deux fois** dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E , muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel. On note F le sous-ensemble de E défini par :

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1 + x^2)f(x)\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

— $F \subset E$

- Si f est la fonction nulle, alors pour tout réel x , $f''(x) = 0 = (1+x^2) \times 0 = (1+x^2)f(x) : f \in F$
- Soient f, g dans F et λ, μ des réels. Alors, $\lambda f + \mu g$ est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)''(x) &= \lambda f''(x) + \mu g''(x) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(1+x^2)f(x) + \mu(1+x^2)g(x) \text{ car } f, g, \in E \\ &= (1+x^2)(\lambda f + \mu g)(x) \end{aligned}$$

Ainsi, F est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de E .

2. Montrer que si f et g sont deux éléments de F , alors $f'g - fg'$ est une fonction constante.
Soient f, g dans E . Posons $h = f'g - fg'$. Puisque f, g sont deux fois dérivables, alors h est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = (f'(x)g'(x) + f''(x)g(x)) - (f'(x)g'(x) - f(x)g''(x)) = (1+x^2)f(x)g(x) - f(x)(1+x^2)g(x) = 0$$

Ainsi, puisque $h' = 0$ sur un intervalle, h est une fonction constante.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

- (a) Vérifier que φ est un élément de F

Puisque φ est composée de l'exponentielle et d'un polynôme, elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi''(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + x \times xe^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)\varphi(x)$$

Ainsi, $\varphi \in F$.

- (b) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \varphi(x) \int_0^x \frac{1}{\varphi(t)^2} dt$$

Montrer que ψ est un élément de F

Puisque φ est deux fois dérivable, et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{\varphi^2}$ est continue. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $f : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt$ est dérivable et $f' = \frac{1}{\varphi^2}$ qui est donc dérivable. Par ailleurs, φ est deux fois dérivable. Par produit, $\varphi = \varphi \times f$ est deux fois dérivable. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = \varphi'(x) \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt + \varphi(x) \times \frac{1}{\varphi^2(x)} = \varphi'(x) \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt + \frac{1}{\varphi(x)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= \varphi''(x) \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt + \varphi'(x) \frac{1}{\varphi^2(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \\ &= \varphi''(x) \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt \\ &= (1+x^2)\varphi(x) \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt \\ &= (1+x^2)\psi(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\psi \in F$.

4. (a) Soit f un élément de F . Montrer, en utilisant le résultat de la question 2 appliqué aux fonctions f et φ , que f est une combinaison linéaire de φ et de ψ

Puisque $f \in F$ et $\varphi \in F$, alors d'après la question 2, il existe une constante C telle que $f'\varphi - f\varphi' = C$.

Dans ce qui suit, il y a des petites «astuces» (i.e. une idée à avoir qui n'est pas spécialement indiquée par l'énoncé. Au vu de la question, on essaie de faire apparaître ψ

En divisant par φ^2 , on a :

$$\frac{f'\varphi - f\varphi'}{\varphi^2} = \frac{C}{\varphi^2}$$

On reconnaît à gauche la dérivée de $\frac{f}{\varphi}$. On peut intégrer entre 0 et x et on obtient :

$$\int_0^x \frac{f'\varphi - f\varphi'}{\varphi^2}(t) dt = \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt$$

Ainsi :

$$\left[\frac{f(t)}{\varphi(t)} \right]_0^x = C \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt$$

i.e.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(0)}{\varphi(0)} = C \int_0^x \frac{1}{\varphi^2(t)} dt$$

i.e.

$$f(x) = \frac{f(0)}{\varphi(0)} \varphi(x) + C \psi(x)$$

Puisque $\frac{f(0)}{\varphi(0)}$ est une constante, $f \in \text{Vect}(\varphi, \psi)$

(b) Montrer finalement que (φ, ψ) est une base de F . En déduire les solutions de l'équation différentielle :

$$f''(x) = (1 + x^2)f(x)$$

On a montré que toute fonction f de F était combinaison linéaire de φ et ψ , ainsi $F = \text{Vect}(\varphi, \psi)$. Par ailleurs, (φ, ψ) forme une famille libre. En effet, si a et b sont des réels tels que $a\varphi + b\psi = 0$, alors en évaluant en 0 on obtient : $a\varphi(0) + b\psi(0) = 0$, i.e. $a = 0$. Ainsi, $b\psi = 0$ et pourtant ψ n'est pas la fonction nulle. Ainsi, $b = 0$. On en déduit donc que (φ, ψ) est une base de F .

Puisque les fonctions f vérifiant $f''(x) = (1 + x^2)f(x)$ sont les éléments de F , on en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $f(x) = ae^{\frac{x^2}{2}} + be^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, avec a, b des réels.
