

Feuille d'exercices n°18

Séries convergentes ou non

Exercice 1.

1. En utilisant les propriétés algébriques du logarithme, simplifier pour tout n l'expression : $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
2. En déduire que $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge
3. Retrouver ce résultat en utilisant un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0

Exercice 2 (Comparaison à une série de Riemann). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

1. Étudier $n^2 u_n$
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.

On pourra utiliser cette méthode (multiplier par un n^α) pour certaines des suites de l'exercice suivant.

Exercice 3. Les séries des termes généraux suivants convergent-elles ?

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$ | 6. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ | 11. $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$, α réel |
| 2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | 7. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ | 12. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ |
| 3. $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n}$ | 8. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ | 13. $u_n = e^{-n^2}$ |
| 4. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ | 9. $u_n = \frac{n!}{(3n)!}$ | 14. $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ |
| 5. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ | 10. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^3}$ | 15. $u_n = \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ |

Remarque : pour s'y entraîner, il existe une section «Ces séries sont-elles convergentes ?» sur le site Bibmath, catégorie «Bibliothèques/Automatismes»

- ◇ **Exercice 4.** Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt$ est convergente.

Calculs de sommes

Exercice 5. On considère la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{n!}$

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$
2. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

- ◇ **Exercice 6.** On considère la suite définie par $u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$
2. Montrer que $\sum u_n$ converge, et déterminer sa somme
3. Peut-on écrire l'égalité suivante ?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} + b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3}$$

- ◇ **Exercice 7 (Calculs de sommes).** Déterminer les valeurs des sommes suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$ | 2. $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ | 3. $S_3 = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ |
|---|--|---|

Résultats théoriques

- ◇ **Exercice 8 (Vrai/faux).**

1. Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang
2. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
3. Si $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge

Exercice 9 (Encore une variante du théorème des gendarmes). Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\sum u_n, \sum w_n$ convergent. Montrer qu'alors $\sum v_n$ converge.

◇ **Exercice 10** (Majorations). Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives, termes généraux de séries convergentes. En majorant habilement, montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \max(u_n, v_n)$ convergent.

Problèmes

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \arctan(x) - \ln(x)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n\pi$ admet une unique solution, notée x_n
2. Établir : $\lim x_n = 0$
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n \leq e^{-n}$
4. En déduire la nature de la série de terme général x_n

♠ **Exercice 12** (Séries de Bertrand - démonstration). On souhaite démontrer que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

1. En comparant avec une série de Riemann, traiter les cas

$$(a) \alpha < 1 \qquad (b) \alpha > 1 \qquad (c) \alpha = 1, \beta = 0 \qquad (d) \alpha = 1, \beta < 0$$

2. On se place dans le cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, et on note S_N la somme partielle d'ordre N de la série. On pose pour $t \in]1; +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$

- (a) Montrer :

$$\forall N \geq 3, \int_2^{N+1} f(t) dt \leq S_N \leq \int_2^N f(t) dt + \frac{1}{2(\ln 2)^\beta}$$

- (b) Conclure en séparant les cas $\beta < 1, \beta = 1$ et $\beta > 1$

♠ **Exercice 13** (Série des inverses des premiers). On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots)$, qui est infinie comme montré au TD 1). Nous allons montrer que la série $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge. Posons pour $n \geq 1$: $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geq 1$ et que donc pour tout $n \geq 1$, $V_n \geq 1$
2. En déduire que (V_n) converge si et seulement si $(\ln V_n)$ converge.
3. Montrer que (V_n) converge si et seulement si $\sum \frac{1}{p_k}$ converge.
4. Montrer pour tout $n \geq 1$:

$$V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right)$$

5. Justifier que pour tout $i \leq n$, le développement en facteurs premiers de i n'implique que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n
6. (difficile) En déduire : $V_n \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$
7. Conclure sur la nature de $\sum \frac{1}{p_k}$

Culturel : Intuitivement, ce résultat nous donne une indication sur la répartition des nombres premiers... On sait par exemple qu'il n'existe pas de $\alpha > 1$ tel que $p_k \geq k^\alpha$ (comparaison avec une série de Riemann), donc le k -ième nombre premier n'est «pas trop grand». Il existe un résultat plus fort, appelé **théorème des nombres premiers**, qui dit : $p_k \sim k \ln(k)$

Exercice 14 (Ecricome 2002). On se propose d'étudier la série de terme général : $u_n(x) = a_n x^n$ où $x \in \mathbb{R}$ et $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$
2. Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente.
4. On suppose maintenant $-1 \leq x < 1$. Pour $t \in [0; 1]$, montrer :

$$2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1 - x)$$

5. Justifier l'existence de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$
6. On pose : $f(x) = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$$

7. En déduire la somme de la série de terme général $u_n(x)$