

Devoir Maison n°14 - Une valeur étonnante

Dans ce problème, on étudie la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier la limite de la suite (S_n) . On considère pour tout entier $p \geq 0$ les deux intégrales :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt \quad ; \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t) dt$$

1. **Introduction** : calculer la valeur de I_0 et de J_0 .

2. **Convergence de la suite** (J_p/I_p)

(a) Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, établir l'inégalité :

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$$

On pourra utiliser deux dérivations

(b) En déduire pour tout $p \geq 0$,

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1})$$

(c) En intégrant par parties, établir une relation de récurrence entre I_{p+1} et I_p .

Indication : on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$

(d) Déduire des résultats précédents :

$$\frac{J_p}{I_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

3. **Convergence et limite de la suite** (S_n)

(a) En intégrant deux fois par parties, montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$I_p = p((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p)$$

(b) En déduire :

$$\forall p \geq 1, \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$$

(c) En utilisant les valeurs de J_0 et I_0 et la relation de la question précédente, déterminer la limite ℓ de la suite (S_n)

(d) Écrire un programme en Python qui demande à l'utilisateur un entier n et affiche le premier entier m tel que

$$|S_m - \ell| < 10^{-n}$$

Mais qu'est-ce que π vient faire ici ? Cliquez sur le PDF pour une explication vidéo dans le monde de la physique.