

Devoir Maison n°13 - Plusieurs critères hors programme sur les séries

Le DM est composé de deux exercices pour les vacances. Je vous encourage très fortement à traiter les deux avec sérieux, mais vous pouvez choisir de n'en rédiger proprement qu'un seul des deux (à rendre). Vous pouvez aussi bien sûr choisir de rédiger les deux, mais c'est facultatif.

SÉRIES ALTERNÉES

Un exemple : la série harmonique alternée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. Justifier que les suites (I_n) et (J_n) sont bien définies.
2. Calculer la valeur de I_0 et J_0
3. (a) Justifier que la suite (I_n) est décroissante.
(b) En déduire que (I_n) est une suite convergente.
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2}$. En déduire la limite de la suite (I_n) .
4. (a) Montrer que pour tout $n > 0$, $I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$
(b) Calculer pour tout n une expression simplifiée de $J_n + J_{n+1}$
(c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n J_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

5. Montrer :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$$

Généralisation : Critère spécial des séries alternées

Cette section est la démonstration d'un résultat hors programme mais souvent utile, en préparation d'un chapitre futur. Nous aurons besoin de plusieurs résultats sur les suites, se référer donc au cours du chapitre 5. Soit (a_n) une suite décroissante positive de réels qui tend vers 0. On pose pour tout entier n :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que la suite (S_n) converge.

1. Quelle suite (a_n) permet de faire de ce résultat une généralisation de l'exercice précédent?
2. Montrer que la suite (S_{2n}) est croissante.
3. Montrer que la suite (S_{2n+1}) est décroissante.
4. Étudier la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$. En déduire que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite.
5. Montrer que la suite (S_n) converge.
6. En appliquant ce résultat, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$ converge.

CRITÈRE DE D'ALEMBERT

Nous allons étudier **le théorème suivant** (hors programme, mais très utile) :

Soit (u_n) une suite strictement positive à partir d'un certain rang, et $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. Alors

- Si $\lambda < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\lambda > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
- Si $\lambda = 1$, on ne peut rien conclure.

Ce théorème est attribué au mathématicien (et philosophe, physicien, encyclopédiste) français Jean le Rond d'Alembert, à qui l'on doit aussi (à peu de choses près) le théorème de factorisation des polynômes du chapitre 12.

Démonstration

1. Nous considérons dans cette première partie le cas $\lambda < 1$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right)$$

On notera $\mu = \frac{\lambda+1}{2}$

(b) Montrer que pour tout $k \geq 0$,

$$u_{n_0+k} \leq \mu^k u_{n_0}$$

(c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2. On se placera maintenant dans le cas $\lambda > 1$. Adapter les questions précédentes, avec cette fois $u_{n_0+k} \geq \mu^k u_{n_0}$.

3. Comprendre μ : sur un axe représentant la droite réelle, placer λ et μ dans les deux cas étudiés.

4. Nous étudions maintenant le cas $\lambda = 1$.

(a) Étudier la série de terme général $u_n = n$

(b) Étudier la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$

(c) Conclure.

Applications

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$ (*sans utiliser les séries géométriques dérivées*)
 2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$
 3. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$
-