

Feuille d'exercices n°18



Exercice 12 (Séries de Bertrand - démonstration). On souhaite démontrer que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

1. En comparant avec une série de Riemann, traiter les cas

(a) $\alpha < 1$

Supposons $\alpha < 1$ et posons $\alpha' = \frac{\alpha+1}{2}$. On montre aisément : $\alpha < \alpha' < 1$. Alors :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha'}} \times \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln(n)^\beta}$$

Or, puisque $\alpha < \alpha'$, alors $n^{\alpha-\alpha'} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et par croissance comparée, $\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln(n)^\beta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Ainsi, $\frac{1}{n^{\alpha'}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln(n)^\beta}\right)$. On en déduit, par comparaison avec une série de Riemann ($\alpha' < 1$), que $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ est le terme général d'une série divergente.

(b) $\alpha > 1$

Supposons maintenant $\alpha > 1$ et posons $\alpha' = \frac{\alpha+1}{2}$. On montre aisément : $\alpha > \alpha' > 1$. Alors :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha'}} \times \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln(n)^\beta}$$

Puisque $\alpha > \alpha'$, alors $n^{\alpha-\alpha'} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et par croissance comparée, $\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln(n)^\beta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, $\frac{1}{n^{\alpha'}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln(n)^\beta}\right)$. On en déduit, par comparaison avec une série de Riemann ($\alpha' > 1$), que $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ est le terme général d'une série convergente.

(c) $\alpha = 1, \beta = 0$

On reconnaît la série harmonique, qui est divergente.

(d) $\alpha = 1, \beta < 0$

Si $\beta < 0$, alors $\ln(n)^\beta \rightarrow 0$ et donc $\frac{1}{\ln(n)^\beta} \rightarrow +\infty$. Ainsi, $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n \ln(n)^\beta}\right)$. Par comparaison avec la série harmonique, la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ diverge.

2. On se place dans le cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, et on note S_N la somme partielle d'ordre N de la série. On pose pour $t \in]1; +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$

(a) Montrer :

$$\forall N \geq 3, \int_2^{N+1} f(t) dt \leq S_N \leq \int_2^N f(t) dt + \frac{1}{2(\ln 2)^\beta}$$

Soit $N \geq 3$. Puisque $\ln(1) = 0$, $S_N = \sum_{k=2}^N f(k)$.

Puisque f est décroissante (produit de fonctions décroissantes positives), pour chaque entier $k \geq 2$ et pour tout $t \in [k; k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$, et donc par croissance de l'intégrale :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

En sommant la deuxième inégalité pour $k \in [2; N]$:

$$\sum_{k=2}^N f(k) \geq \sum_{k=2}^N \int_k^{k+1} f(t) dt$$

On reconnaît à droite la relation de Chasles, et à gauche S_N . On obtient :

$$S_N \geq \int_2^{N+1} f(t) dt$$

Sommons maintenant la première inégalité pour $k \in [2; N-1]$:

$$\sum_{k=2}^{N-1} f(k+1) \leq \sum_{k=2}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t) dt$$

On reconnaît à droite la relation de Chasles, et à gauche après un changement d'indice $j = k+1$ on obtient :

$$\sum_{j=3}^N f(j) \leq \int_2^N f(t) dt$$

Ajoutons $f(2)$ aux deux membres de l'inégalité :

$$S_N \leq \int_2^N f(t) dt + \frac{1}{2(\ln 2)^\beta}$$

Les deux inégalités souhaitées sont donc démontrées.

(b) Conclure en séparant les cas $\beta < 1$, $\beta = 1$ et $\beta > 1$

- Supposons $\beta < 1$: $f(t) = \frac{1}{t \ln(t)^\beta} = \frac{1}{t} \times (\ln(t))^{-\beta}$. On reconnaît la forme « $u'u^{-\beta}$ » d'où :

$$\int_2^{N+1} f(t) dt = \left[\frac{\ln(t)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_2^{N+1} = \frac{1}{1-\beta} (\ln(N+1)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta})$$

Puisque $1-\beta > 0$, alors $\ln(N+1)^{1-\beta} \rightarrow +\infty$ et l'intégrale de f diverge vers $+\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$. Puisque $S_N \geq \int_2^{N+1} f(t) dt$, alors $\boxed{S_N \rightarrow +\infty}$

- Supposons $\beta > 1$: avec la même primitive, on a :

$$\int_2^N f(t) dt = \left[\frac{\ln(t)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_2^N = \frac{1}{1-\beta} (\ln(N)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta})$$

Cette fois, $\ln(N)^{1-\beta} \rightarrow 0$ et donc $\int_2^N f(t) dt + \frac{1}{2 \ln(2)^\beta} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \ln(2)^\beta} - \frac{\ln(2)^\beta}{1-\beta}$. Puisque l'intégrale converge, elle est majorée et donc S_N est majorée (et croissante) donc $\boxed{S_N \text{ converge.}}$

- Supposons $\beta = 1$: alors $\int_2^{N+1} f(t) dt = \int_2^{N+1} \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_2^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$. Cette fois encore, $\boxed{S_N \rightarrow +\infty}$



Exercice 13 (Série des inverses des premiers). On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots)$, qui est infinie comme montré au TD 1). Nous allons montrer que la série $\sum \frac{1}{p_k}$

diverge. Posons pour $n \geq 1$: $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geq 1$ et que donc pour tout $n \geq 1$, $V_n \geq 1$

Soit $k \geq 1$. $p_k \geq 2$ et donc $\frac{1}{2} \frac{1}{p_k} > 0$ d'où $0 < 1 - \frac{1}{p_k} < 1$. On en déduit par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ que $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geq 1$ et par produit de nombres supérieurs à 1 : $V_n \geq 1$

2. En déduire que (V_n) converge si et seulement si $(\ln V_n)$ converge.

D'après la question précédente, $\ln(V_n)$ est bien défini. Si $(\ln(V_n))$ converge vers un réel ℓ , alors par continuité de l'exponentielle, $V_n = \exp(\ln(V_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(\ell)$. Réciproquement, si (V_n) converge vers un réel ℓ' , puisque $V_n \geq 1$, alors par conservation des inégalités larges à la limite $\ell' \geq 1$ et par continuité de la fonction $\ln$ en 1 : $\ln(V_n) \rightarrow \ln(\ell')$.

Remarque : sans le résultat de la question précédente, on pourrait avoir (V_n) convergente, vers un réel $\ell \leq 0$ et donc $\ln(V_n)$ qui n'existe pas à partir d'un certain rang, ou qui existe mais qui diverge vers $-\infty$ (limite de $\ln$ en 0)

3. Montrer que (V_n) converge si et seulement si $\sum \frac{1}{p_k}$ converge.

On a montré que (V_n) converge si et seulement si $(\ln(V_n))$ converge. Or, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\ln(V_n) &= \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)\end{aligned}$$

On reconnaît la série de terme général $\ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{p_k}$. En effet, $p_k \rightarrow +\infty$ puisque $p_k \geq k$ (le k -ième nombre premier est plus grand que le k -ième nombre). Ainsi, la série de terme général $\ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$ est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{p_k}$ (théorème du cours sur les termes généraux équivalents pour des séries à termes positifs, ce qui est le cas ici). Finalement, (V_n) converge ssi $(\ln(V_n))$ converge ssi $\sum \frac{1}{p_k}$ converge.

Dans la suite, on va utiliser le sens réciproque de ces équivalences : montrer que $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge en montrant que (V_n) diverge.

4. Montrer pour tout $n \geq 1$:

$$V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right)$$

Puisque pour $k \geq 1$, $p_k \geq 2$ et $0 \leq \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{2}$, alors la série de terme général $\left(\frac{1}{p_k} \right)^j$ converge (série géométrique) et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

D'où le résultat en réinjectant cette égalité dans la définition de V_n .

5. Justifier que pour tout $i \leq n$, le développement en facteurs premiers de i n'implique que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n

Par contraposée : si un nombre i contient dans son développement en facteur premier un nombre premier supérieur à p_n , puisque $p_n \geq n$ et que les nombres premiers sont supérieurs ou égaux à 2, alors $i \geq p_n > n$. Ainsi, si $i \leq n$, tous ses facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à p_n

6. (difficile) En déduire : $V_n \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

$V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j} \right)$. Quand on développe le produit de n sommes, on obtient un terme de chacune des sommes : V_n est donc une somme des termes de la forme $\frac{1}{p_1^{j_1}} \times \frac{1}{p_2^{j_2}} \times \dots \times \frac{1}{p_n^{j_n}} = \frac{1}{p_1^{j_1} \times \dots \times p_n^{j_n}}$ où $j_1, \dots, j_n$ sont des entiers quelconques. En variant les valeurs de $j_1, \dots, j_n$ on obtient donc au dénominateur tous les nombres dont le développement en facteurs premiers ne fait intervenir que des nombres premiers parmi $p_1, \dots, p_n$. D'après la question précédente, tous les nombres $i \in [1; n]$ sont dans ce cas. Ainsi, tous les $\frac{1}{i}$ avec $i \in [1; n]$ apparaissent dans la forme développée de V_n , plus d'autres nombres. Puisque tous ces termes sont positifs, on obtient donc :

$$V_n \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

7. Conclure sur la nature de $\sum \frac{1}{p_k}$

La suite $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)$ diverge vers $+\infty$ en tant que suite des sommes partielles de la série harmonique.

Par comparaison, $V_n \rightarrow +\infty$. D'après la question 3, on en déduit que $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge.

Culturel : Intuitivement, ce résultat nous donne une indication sur la répartition des nombres premiers ... On sait par exemple qu'il n'existe pas de $\alpha > 1$ tel que $p_k \geq k^\alpha$ (comparaison avec une série de Riemann), donc le k -ième nombre premier n'est «pas trop grand». Il existe un résultat plus fort, appelé **théorème des nombres premiers**, qui dit : $p_k \sim k \ln(k)$

Exercice 14 (Ecricome 2002). On se propose d'étudier la série de terme général : $u_n(x) = a_n x^n$ où $x \in \mathbb{R}$ et $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$
Commençons par montrer que pour tout $t \in [0; 1]$:

$$t \leq \frac{1+t^2}{2} \leq \frac{1+t}{2}$$

La première inégalité découle de : $(t-1)^2 = 1+t^2-2t$. En soustrayant $2t$ et en divisant par 2 les deux membres, on obtient l'inégalité désirée. La seconde inégalité découle de : $\forall t \in [0; 1], t^2 \leq t$. En ajoutant 1 et en divisant par 2 les deux membres, on obtient l'inégalité désirée. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0; 1]$ et par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt$$

$$\text{Or, } \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \text{ et } \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^n (2du) = 2 \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{2}{n+1}$$

2. Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| = 1$ (i.e. $x = 1$ ou $x = -1$). Alors,

$$|u_n(x)| = |a_n x^n| = a_n |x|^n = a_n$$

Or, la série de terme général a_n diverge puisque $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ (comparaison avec la série harmonique). La série de terme général $u_n(x)$ n'est donc pas absolument convergente.

Remarque : pour $x = 1$, on a $x = |x|$ et la série diverge mais pour $x = -1$ elle peut être semi-convergente.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente.

On a déjà montré que ce n'est pas le cas si $|x| = 1$. Par ailleurs,

- Si $|x| > 1$, $|u_n(x)| = a_n |x|^n$ avec $|x|^n \rightarrow +\infty$. Par comparaison avec une série divergente, la série de terme général $|u_n(x)|$ diverge.
- Si $|x| < 1$, alors $|u_n(x)| = a_n |x|^n$. D'après l'encadrement de la question précédente, avec le théorème des gendarmes, $a_n \rightarrow 0$. Ainsi, $|u_n(x)| = o(|x|^n)$. Puisque $|x| < 1$, la série de terme général $|x|^n$ converge et par comparaison, la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente.

Une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente est donc : $|x| < 1$.

4. On suppose maintenant $-1 \leq x < 1$. Pour $t \in [0; 1]$, montrer :

$$2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x)$$

Question un peu désagréable pour laquelle il faut trouver des astuces de calcul. Raisonnons par disjonction de cas sur x :

- Supposons d'abord $x \leq 0$. Alors, $-xt^2 \geq 0$ et donc :

$$2 - x - xt^2 \geq 2 - x = \frac{3}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x)$$

Puisque par hypothèse $x \geq -1$, alors $\frac{1}{2}(1+x) \geq 0$ et donc $2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x)$

- Supposons maintenant $x > 0$. Alors, puisque $t \in [0; 1]$, $0 \leq xt^2 \leq x$. Ainsi,

$$2 - x - xt^2 \geq 2 - 2x = \frac{3}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1-x) \geq \frac{3}{2}(1-x)$$

5. Justifier l'existence de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$

*Pour le moment, en tout cas jusqu'au chapitre 19, justifier l'existence d'une intégrale veut dire : justifier que c'est l'intégrale d'une **fonction continue sur un segment**. Il s'agit donc ici de justifier que pour tout réel $x \in [-1; 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{2}{2-x-xt^2}$ est une fonction continue sur $[0; 1]$.*

Soit $x \in [-1; 1[$. Puisque $t \mapsto 2 - x - xt^2$ est une fonction continue, et qu'elle ne s'annule pas sur $[0; 1]$ d'après la question précédente (puisque $\frac{3}{2}(1-x) > 0$), alors $t \mapsto \frac{2}{2-x-xt^2}$ est continue sur $[0; 1]$, donc l'intégrale est bien définie.

6. On pose : $f(x) = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1; 1[$.

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| &= \left| \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt - \sum_{k=0}^n \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^k x^n dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2} - \int_0^1 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^k x^n dt \right| \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \left| \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2} - \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{(1+t^2)x}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{(1+t^2)x}{2}} dt \right| \text{ en reconnaissant une somme géométrique} \\ &= \left| \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} - \frac{2}{2-x-xt^2} + \frac{((1+t^2)x)^{n+1}}{2^n(2-x-xt^2)} dt \right| \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{2^n} \left| \int_0^1 \frac{(1+t^2)^{n+1}}{2-x-xt^2} dt \right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{2^n} \int_0^1 \frac{(1+t^2)^{n+1}}{\frac{3}{2}(1-x)} dt \text{ par inégalité triangulaire intégrale + question 4} \\ &\leq \frac{2|x|^{n+1}}{3 \times 2^n(1-x)} \int_0^1 (1+t^2)^{n+1} dt \\ &\leq \frac{2|x|^{n+1}}{3 \times 2^n(1-x)} \int_0^1 (1+t)^{n+1} dt \text{ car pour } t \in [0; 1], t^2 \leq t \\ &\leq \frac{2|x|^{n+1}}{3 \times 2^n(1-x)} \left[\frac{(1+t)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 \\ &\leq \frac{2|x|^{n+1}}{3 \times 2^n(n+2)(1-x)} (2^{n+2} - 1) \\ &\leq \frac{2^{n+3}|x|^{n+1}}{3 \times 2^n(n+2)(1-x)} \\ &\leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \end{aligned}$$

C'est une question technique (beaucoup de calcul) mais pas très astucieuse : c'est vraiment le genre de questions techniques et calculatoires sur lesquelles il est pertinent de s'entraîner et d'être performant.e !

7. En déduire la somme de la série de terme général $u_n(x)$

Puisque $|x| < 1$, $\frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par théorème des gendarmes, on a donc $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

i.e. : la série de terme général $u_k(x)$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = f(x) = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$$