

Feuille d'exercices n°19

Convergence d'intégrales

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\int_0^1 \ln(t) dt$ | 4. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ | 7. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(\frac{1}{t})}{\ln(1+t)} dt$ |
| 2. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ | 5. $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ | |
| 3. $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$ | 6. $\int_1^{+\infty} t^t dt$ | 8. $\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$ |

Exercice 2. En comparant avec une fonction de la forme x^α , montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{4}}} dx$ converge.

Exercice 3. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2; +\infty[$?

Calcul d'intégrales

Exercice 4. Justifier la convergence puis calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$.
On posera $u = \sqrt{t}$, puis on pourra intégrer par parties.

1. En effectuant le changement de variable défini par $u = \sqrt{t}$, déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : t \mapsto \cos(\sqrt{t})$

Exercice 5.

2. Déterminer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et en cas de convergence déterminer sa valeur.
3. Mêmes questions pour $f : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$

1. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0
2. Montrer que pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx = \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx$$

Exercice 6.

3. En déduire un encadrement de $\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$ en fonction de $\arctan(A)$, $\arctan(2A)$ et $\ln(2)$
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$ converge vers $\frac{\pi \ln(2)}{2}$

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$ converge.

2. Montrer :

Exercice 7.

$$\int_X^{X+1} \arctan(x) dx \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x) dx$
4. Calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$

Exercice 8. On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$

1. Montrer que I et J sont des intégrales convergentes.
2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $I = J$
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$. En déduire : $I + J = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt$
4. Montrer : $2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + I$ puis conclure avec la valeur de I .

Éléments culturels

Exercice 9 (Un résultat théorique : lemme de Riemann-Lebesgue).

Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. En intégrant par parties, montrer que pour tout $A > 0$, $\int_0^A f(t) \cos(xt) dt$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

On pourra revenir à la définition de la limite avec un ε et trouver un A tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$

Exercice 10 (Une intégrale convergente mais pas absolument convergente : l'intégrale de Dirichlet).

L'objectif de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente mais pas absolument convergente. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, appelée **sinus cardinal**, est continue sur $]0; +\infty[$, étudions donc son comportement aux bornes de $\mathbb{R}_+$.

1. **Étude sur $]0; 1]$.** Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.
2. **Étude sur $[1; +\infty[$** Posons $x \geq 1$ et étudions $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$
 - (a) Montrer : $F(x) = -\frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$
 - (b) En déduire que F converge quand x tend vers $+\infty$ puis que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est une intégrale convergente.

3. Non intégrabilité.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [(n-1)\pi; n\pi]$. Justifier :

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{|\sin(t)|}{n\pi}$$

- (b) En déduire : $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \frac{2}{n\pi}$

- (c) En utilisant la série de terme général $\frac{2}{n\pi}$, justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge.

Pour aller plus loin : vous trouverez [sur Bibmath](#) un exercice permettant de déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$