

XIX. SEMAINE 19 : 9-13 MARS

Contenus :

1. Séries convergentes, séries divergentes. Connaître des exemples «simples» : séries grossièrement divergentes, série harmonique, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2^n}$, ...
2. Cas des séries à termes positifs : si $u_n \leq v_n$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$ avec $\sum u_n$ divergente ou $\sum v_n$ convergente. Bien travailler la manipulation de $o, \sim$
3. Séries de Riemann, séries géométriques, séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, série exponentielle
4. Notion de convergence absolue et de séries semi-convergentes.
5. En DM pour la rentrée : séries alternées et critère de d'Alembert. Les deux sont hors programme (rien à connaître par cœur, mais ça n'empêche pas de tirer des leçons de ce qu'on fait en DM!)

Questions de cours :

1. Définition de série grossièrement divergente. Montrer qu'une série grossièrement divergente est divergente.
2. Montrer que la série harmonique diverge (preuve du cours à l'aide d'une somme de Riemann)
3. Soient $(u_n), (v_n)$ des suites à termes positifs. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge; si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge (prop. 6 et 7 du cours)
4. Calcul de sommes : série géométrique et série géométrique dérivée d'ordre 1 (critère de convergence, formule de la somme et démonstration)
5. Démonstration : une série absolument convergente est convergente.

Méthode : toujours commencer par vérifier la divergence grossière, puis que le terme général est à termes positifs. Si c'est le cas, on cherche une majoration, un équivalent, une domination. Sinon, on essaie d'abord de montrer la convergence absolue avec les mêmes outils.