

XX. SEMAINE 20 : 16-20 MARS

Contenus :

1. Intégrales impropres. Définitions de convergences sur $]a; b]$, $[a; b[$, $]a; b[$, $[a; b] \setminus \{c\}$, etc. **Rédaction** : on commencera toujours par justifier sur quel(s) intervalle(s) maximal(aux) la fonction à intégrer est continue, **puis** une étude aux points problématiques.
2. Notion d'intégrale faussement impropre.
3. **Attention** : une intégrale convergente sur $[0; +\infty[$ ne permet pas de dire que la fonction intégrée tend vers 0
4. Propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire intégrale
5. Intégrales de Riemann, intégrale de $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$
6. Intégrabilité : si $\int |f|$ converge, alors $\int f$ converge.
7. Théorème de changement de variable pour une intégrale impropre : l'une converge ssi l'autre converge.
8. **Pour les intégrations par parties** : on reviendra toujours à une intégrale sur un segment et on passera **ensuite** à la limite.

Questions de cours :

1. Convergence des intégrales de Riemann sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$ (critère et démonstration)
2. Contre-exemple à la conjecture : si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.
3. Démonstration : si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.
4. Exemple d'une intégrale convergente d'une fonction non intégrable : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ (exercice 10 du TD)
5. Avec le théorème de changement de variable : montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$ puis la valeur de $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt$