

Feuille d'exercices n°19

Exercice 5. 1. En effectuant le changement de variable défini par $u = \sqrt{t}$, déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : t \mapsto \cos(\sqrt{t})$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f .

Pour tout $x \geq 0$, en posant $u = \sqrt{t}$ (donc $t = u^2$ et $dt = 2udu$)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \cos(\sqrt{t})dt \\ &= \int_0^{\sqrt{x}} \cos(u)2udu \\ &= [2u \sin(u)]_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} 2 \sin(u)du \text{ en intégrant par parties} \\ &= 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) - 2[-\cos(u)]_0^{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) - 2 \end{aligned}$$

Une primitive de f est donc par exemple : $x \mapsto 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x})$

2. Déterminer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et en cas de convergence déterminer sa valeur.

On sait : $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) - 2$. Il s'agit donc d'étudier la limite quand $x \rightarrow +\infty$. Deux niveaux pour la suite :

— Niveau 1 : Puisque $\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})$ diverge sans être bornée et que $2\cos(\sqrt{x}) - 2$ est bornée, la fonction F diverge et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

— Niveau 2 : en justifiant plus proprement l'absence de limites.

Posons pour tout entier n : $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2$ et $y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2$. Alors :

$$\begin{aligned} F(x_n) &= \sqrt{x_n} \sin(\sqrt{x_n}) + 2\cos(\sqrt{x_n}) - 2 \\ &= \sqrt{x_n} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + 2\cos(\sqrt{x_n}) - 2 \\ &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - 2 \\ &= 2n\pi + 2 - \frac{\pi}{2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} F(y_n) &= \sqrt{y_n} \sin(\sqrt{y_n}) + 2\cos(\sqrt{y_n}) - 2 \\ &= \sqrt{y_n} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + 2\cos(\sqrt{y_n}) - 2 \\ &= -\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - 2 \\ &= \frac{\pi}{2} - 2n\pi - 2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

Supposons alors par l'absurde que F ait une limite ℓ en $+\infty$. Alors, puisque $x_n \rightarrow +\infty$ et $y_n \rightarrow +\infty$, par composition des limites, $F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $F(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Ceci est en contradiction avec le fait que $F(x_n)$ et $F(y_n)$ aient des limites différentes.

*Remarques : (x_n) et (y_n) ont été choisies pour que le sin vaille respectivement 1 ou -1 . Puisqu'on ne cherchait pas seulement l'existence d'une limite (potentiellement infinie) mais la convergence de F , une seule de ces deux suites suffit : une limite infinie d'une sous suite empêche la fonction d'avoir une limite finie. On pourra retenir **la méthode** : trouver deux suites ayant des limites différentes pour prouver qu'une fonction / suite n'a pas de limite.*

-
3. Mêmes questions pour $f : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$ en posant $u = e^t$

Cherchons d'abord une primitive de f . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $u = e^t$ donc $t = \ln(u)$ et $dt = \frac{du}{u}$:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^{e^x} \frac{du}{u(1+u)}$$

Or pour tout $u \notin \{0; 1\}$, $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$. Alors :

$$\int_0^x f(t)dt = [\ln(u) - \ln(1+u)]_1^{e^x} = \left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right) \right]_1^{e^x} = -\ln(1+e^{-x}) + \ln(2)$$

Puisque $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, alors $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(2)$

Ainsi, $t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} = \ln(2)$

Exercice 6. 1. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} &= \frac{\arctan(2x)}{x} - \frac{\arctan(x)}{x} \\ &= 2 \frac{\arctan(2x)}{2x} - \frac{\arctan(x)}{x} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \times 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, cette fonction se prolonge par continuité en 0 (avec 1 comme limite). On en déduit pour la suite que pour tout $A > 0$, $\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$ est bien définie.

2. Montrer que pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx = \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx$$

Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx &= \int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x} dx - \int_0^A \frac{\arctan(x)}{x} dx \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^{2A} \frac{\arctan(u)}{u} du - \int_0^A \frac{\arctan(x)}{x} dx \text{ en posant } u = 2x \text{ donc } \frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \\ &= \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx \end{aligned}$$

3. En déduire un encadrement de $\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$ en fonction de $\arctan(A)$, $\arctan(2A)$ et $\ln(2)$
Soit $x \in [A; 2A]$. Par croissance de la fonction $\arctan$:

$$\arctan(A) \leq \arctan(x) \leq \arctan(2A)$$

Ainsi :

$$\int_A^{2A} \frac{\arctan(A)}{x} dx \leq \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx \leq \int_A^{2A} \frac{\arctan(2A)}{x} dx$$

Or, $\int_A^{2A} \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_A^{2A} = \ln(2A) - \ln(A) = \ln(2) + \ln(A) - \ln(A) = \ln(2)$. Ainsi :

$$\ln(2) \arctan(A) \leq \int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx \leq \ln(2) \arctan(2A)$$

-
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$ converge vers $\frac{\pi \ln(2)}{2}$

Puisque $\arctan(A) \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et que $\arctan(2A) \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$, par théorème des gendarmes : $\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2} \ln(2)$. Ainsi, l'intégrale est convergente sur $[0; +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx = \frac{\pi \ln(2)}{2}$$

Exercice 7.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$ converge.

La fonction $t \mapsto \arctan(t+1) - \arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $[x; x+1]$ et pour tout $t \in [x; x+1]$: $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \in \left[\frac{1}{1+(x+1)^2}; \frac{1}{1+x^2} \right]$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis :

$$0 \leq \arctan(x+1) - \arctan(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Puisque $\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, d'après le critère de Riemann, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ et par comparaison :

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx \text{ converge}$$

2. Montrer :

$$\int_X^{X+1} \arctan(x) dx \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Soit $X \in \mathbb{R}_+$. Par croissance de la fonction $\arctan$, pour tout $x \in [X; X+1]$: $\arctan(X) \leq \arctan(x) \leq \arctan(X+1)$. Par croissance de l'intégrale :

$$\arctan(X) \leq \int_X^{X+1} \arctan(x) dx \leq \arctan(X+1)$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\int_X^{X+1} \arctan(x) dx \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(x) dx &= [x \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \arctan(1) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

4. Calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dx$

Soit $X \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^X (\arctan(x+1) - \arctan(x))dx &= \int_0^X \arctan(x+1)dx - \int_0^X \arctan(x)dx \\
 &= \int_1^{X+1} \arctan(u)du - \int_0^X \arctan(x)dx \text{ en posant } u = x+1 \\
 &= \int_1^X \arctan(u)du + \int_X^{X+1} \arctan(u)du - \int_0^1 \arctan(x)dx - \int_1^X \arctan(x)dx \\
 &= \int_X^{X+1} \arctan(u)du - \int_0^1 \arctan(x)dx \\
 &= \int_X^{X+1} \arctan(u)du - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) \\
 &\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$

Exercice 8. On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$

1. Montrer que I et J sont des intégrales convergentes.

La fonction $\ln \circ \sin$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$, la fonction $\ln \circ \cos$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Or pour $t \in]0; \frac{\pi}{2}]$:

$$\ln(\sin(t)) = \ln(t + o(t)) = \ln(t(1 + o(1))) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln(t)$$

Or, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge. Ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$ converge. Cherchons maintenant un équivalent de $\ln(\cos(t))$ en $\frac{\pi}{2}$. Posons $t = \frac{\pi}{2} - h$ où $h \rightarrow 0$. $\ln(\cos(t)) = \ln(\cos(\frac{\pi}{2} - h)) = \ln(\sin(h)) \sim \ln(h)$ et donc de même $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$ converge.

2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $I = J$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du) \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos(u))du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))du \\
 &= J
 \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$. En déduire : $I + J = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))dt$
D'après la formule d'addition, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sin(2t) = \sin(t+t) = 2 \sin(t) \cos(t) \quad \text{donc} \quad \sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) - \ln(2) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt \end{aligned}$$

4. Montrer : $2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + I$ puis conclure avec la valeur de I .

$$\begin{aligned} 2I &= I + I \\ &= I + J \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du \text{ en posant } u = 2t \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \left(I + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) dx \right) \text{ en posant } x = u - \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \left(I + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} (I + J) \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + I \end{aligned}$$

On en déduit : $I = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$

Exercice 9 (Un résultat théorique : lemme de Riemann-Lebesgue).

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. En intégrant par parties, montrer que pour tout $A > 0$, $\int_0^A f(t) \cos(xt) dt$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$
Soit $A > 0$. La fonction $t \mapsto \sin(xt)$ et la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t) \cos(xt) dt &= \left[f(t) \times \frac{1}{x} \sin(xt) \right]_0^A - \frac{1}{x} \int_0^A f'(t) \sin(xt) dt \\ &= \frac{f(A)}{x} \sin(xA) - \frac{1}{x} \int_0^A f'(t) \sin(xt) dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{|f(A)|}{x} |\sin(xA)| + \frac{1}{x} \int_0^A |f'(t)| |\sin(xt)| dt$$

Puisque $|\sin|$ est majorée par 1 et que, d'après le théorème des bornes, il existe M_1, M_2 tels que pour tout $t \in [0; A]$: $|f(t)| \leq M_1, |f'(t)| \leq M_2$, alors :

$$\left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{M_1}{x} + \frac{M_2 A}{x}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\int_0^A f(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

On pourra revenir à la définition de la limite avec un ε et trouver un A tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable, alors $\int_x^{+\infty} |f(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Il existe donc un $A > 0$ tel que :

$\int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$. Par ailleurs, $\int_0^A f(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, il existe un x_0 tel que pour tout $x \geq 0$, $\left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq x_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \right| &= \left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt + \int_A^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \right| \text{ par relation de Chasles} \\ &\leq \left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \right| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \varepsilon + \int_A^{+\infty} |f(t) \cos(xt)| dt \text{ par inégalité triangulaire intégrale} \\ &\leq \varepsilon + \int_A^{+\infty} |f(t)| dt \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Puisque 2ε est autant arbitraire que ε , alors $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.