Devoir Maison n°13 - Plusieurs critères hors programme sur les séries

Le DM est composé de deux exercices pour les vacances. Je vous encourage très fortement à traiter les deux avec sérieux, mais vous pouvez choisir de n'en rédiger proprement qu'un seul des deux (à rendre). Vous pouvez aussi bien sûr choisir de rédiger les deux, mais c'est facultatif.

Séries alternées

Un exemple : la série harmonique alternée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. Justifier que les suites (I_n) et (J_n) sont bien définies.
Puisque les fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto (1+x)^2$ sont continues et ne s'annulent pas sur $[0;1]$ et que la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0;1]$ pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, alors les fonctions intégrées sont continues sur le segment $[0;1]$ donc (I_n) et (J_n) sont bien définies.
Méthode *pour justifier qu'une intégrale est bien définie :*
   - *dans le cas «facile», comme ici, la fonction intégrée est continue-sur-un-segment*
   - *sinon, justifier d'abord que la fonction intégrée est continue (par morceaux si besoin) sur l'intervalle ouvert ou semi-ouvert, puis étudier la convergence aux bornes (cf. outils du chapitre 19)*

2. Calculer la valeur de I_0 et J_0

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$
$$J_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

3. (a) Justifier que la suite (I_n) est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, $x \leq 1$ donc en multipliant par x^n qui est positif : $x^{n+1} \leq x^n$. Puisque $\frac{1}{(1+x)^2}$ est positif, on a de même :
$$\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq \frac{x^n}{(1+x)^2}$$
Par croissance de l'intégrale : $I_{n+1} \leq I_n$ et donc la suite (I_n) est décroissante.

   (b) En déduire que (I_n) est une suite convergente.
Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, puisque pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{x^n}{(1+x)^2} \geq 0$, alors la suite (I_n) est minorée par 0. On en déduit, d'après le **théorème de la limite monotone** que (I_n) est une suite convergente.
*Des remarques sur le théorème de la limite monotone, qui vous pose quelques problèmes : les majorations / minorations **ne doivent pas dépendre de la variable** (ici n) pour être valable. Par ailleurs, le fait qu'on n'ait **pas trouvé** de borne ne suffit pas à dire qu'il n'en existe pas. Bien réfléchir au sens de ces infos !*

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2}$. En déduire la limite de la suite (I_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n + 2x^{n+1} + x^{n+2}}{(1+x)^2}dx \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+2x+x^2)}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \text{ en reconnaissant une identité remarquable} \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
Or, d'après la question précédente, (I_n) admet une limite ℓ. On a donc : $\lim I_n = \lim I_{n+1} = \lim I_{n+2} = \ell$. Par ailleurs, $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On a donc en passant à la limite :
$$\ell + 2\ell + \ell = 0$$

On en déduit : $4\ell = 0$, i.e. $\boxed{\ell = 0}$

4. (a) Montrer que pour tout $n > 0$, $I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$

Soit $n > 0$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto x^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ *(c'est le seul argument de ce théorème !)* sur le segment $[0;1]$, donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \\ &= \left[x^n \times \left(-\frac{1}{1+x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= nJ_{n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Calculer pour tout n une expression simplifiée de $J_n + J_{n+1}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \boxed{\frac{1}{n+1}}$

(c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n J_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

C'est la question technique de l'exercice.

Raisonnons par récurrence.

— Initialisation : pour $n = 0$, on a d'une part $(-1)^0 J_0 = J_0$ et d'autre part $\ln(2) - \sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - 0 = \ln(2) = J_0$. La propriété est initialisée.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vérifiée. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} J_{n+1} &= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - J_n\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n J_n \\ &= \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

La récurrence est établie.

— Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n J_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

5. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

AU vu de la question précédente, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n J_n$. Il suffit donc d'étudier la limite de $(-1)^n J_n$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2}$, alors $J_n = \frac{1}{n+1}\left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{I_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $I_{n+1} \to 0$ d'après la question 3.c

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n J_n \to \ln(2)$. Ainsi, la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

C'est un exemple de série ***convergente mais pas absolument convergente*** *(i.e. semi-convergente) :* $\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \frac{1}{k}$ *et la série harmonique diverge.*

Généralisation : Critère spécial des séries alternées

Cette section est la démonstration d'un résultat hors programme mais souvent utile, en préparation d'un chapitre futur. Nous aurons besoin de plusieurs résultats sur les suites, se référer donc au cours du chapitre 5. Soit (a_n) une suite décroissante positive de réels qui tend vers 0. On pose pour tout entier n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que la suite (S_n) converge.

1. Quelle suite (a_n) permet de faire de ce résultat une généralisation de l'exercice précédent ?
   Avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n}$ (suite décroissante positive qui tend vers 0), on retrouve que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.
2. Montrer que la suite (S_{2n}) est croissante.
   On a déjà fait ça plusieurs fois cette année, ne pas se tromper dans les indices !
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k \\ &= (-1)^{2n} a_{2n+1} + (-1)^{2n+1} a_{2n+2} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \text{ car } 2n \text{ est pair et } 2n+1 \text{ impair} \\ &\geq 0 \text{ car } a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \text{ par décroissance de } (a_n) \end{aligned}$$

   Ainsi, (S_{2n}) est une suite croissante.
3. Montrer que la suite (S_{2n+1}) est décroissante.
   De même, $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = a_{2n+3} - a_{2n+2} \leq 0$ et (S_{2n+1}) est une suite décroissante.
4. Étudier la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$. En déduire que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par hypothèse. Ainsi, puisque l'une des deux suites est croissante, l'autre décroissante et que la différence tend vers 0, **d'après le théorème des suites adjacentes**, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ
5. Montrer que la suite (S_n) converge.
   D'après un résultat du cours, si (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors (S_n) converge.
   Attention, il ne suffit pas d'écrire «par disjonction de cas» selon si n est pair ou impair ! Revoir la démonstration.
6. En appliquant ce résultat, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$ converge.
   Il suffit de prendre $a_k = \frac{1}{k^2}$. C'est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0 donc le théorème s'applique.
   *Remarque : ici, la série est même **absolument convergente**, et on n'a pas besoin de ce résultat. Mais le même résultat est valable pour la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, $\frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k)}$, etc., qui ne sont pas absolument convergentes.*

Critère de d'Alembert

Nous allons étudier **le théorème suivant** (hors programme, mais très utile) :
Soit (u_n) une suite strictement positive à partir d'un certain rang, et $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$. Alors

- Si $\lambda < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\lambda > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
- Si $\lambda = 1$, on ne peut rien conclure.

Ce théorème est attribué au mathématicien (et philosophe, physicien, encyclopédiste) français Jean le Rond d'Alembert, à qui l'on doit aussi (à peu de choses près) le théorème de factorisation des polynômes du chapitre 11.

Démonstration

1. Nous considérons dans cette première partie le cas $\lambda < 1$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$$
C'est la définition de la convergence, avec $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2} > 0$. On a alors un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda + \varepsilon = \frac{\lambda+1}{2}$$
On notera $\mu = \frac{\lambda+1}{2}$

(b) Montrer que pour tout $k \geq 0$,
$$u_{n_0+k} \leq \mu^k u_{n_0}$$
On le montre par récurrence sur k grâce à la question précédente.

(c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
Puisque (u_n) est positive et qu'on a majoré, à partir d'un certain rang, la suite (u_n) par une suite géométrique de raison $\mu < 1$, alors par comparaison, u_n est un terme général de série convergente.

2. On se placera maintenant dans le cas $\lambda > 1$. Adapter les questions précédentes, avec cette fois $u_{n_0+k} \geq \mu^k u_{n_0}$.
On montrera d'abord qu'à partir d'un certain n_0, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{\lambda+1}{2} (= \mu)$ puis que pour tout $k \geq 0$, $u_{n_0+k} \geq \mu^k u_{n_0}$. Ainsi, par comparaison avec une série géométrique de raison $\mu > 1$, u_n est un terme général de série divergente.
et même grossièrement divergente

3. Comprendre μ : sur un axe représentant la droite réelle, placer λ et μ dans les deux cas étudiés.
μ est toujours au milieu entre λ et 1 (c'est la moyenne des deux nombres)

4. Nous étudions maintenant le cas $\lambda = 1$.

(a) Étudier la série de terme général $u_n = n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$. On est bien dans le cas $\lambda = 1$ et la série de terme général u_n est **grossièrement divergente.**

(b) Étudier la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$ donc on est dans le cas $\lambda = 1$. D'après le critère de Riemann, la série de terme général u_n est convergente.

(c) Conclure.
On a trouvé un exemple de série convergente et un exemple de série divergente avec $\lambda = 1$, donc c'est un cas indéterminé.
Remarque : ce n'est pas simplement parce que la preuve ci-dessus n'est pas valable dans le cas $\lambda = 1$ qu'on ne peut pas conclure, il faut montrer que le cas est effectivement indéterminé.

Applications

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$ (*sans utiliser les séries géométriques dérivées*)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1\end{aligned}$$
Par ailleurs, (u_n) est une suite positive. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, d'après le critère de d'Alembert, la série de terme général u_n converge.

2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$
Pour tout $n \geq 0$,
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)n!n^n}{n!(n+1)(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \text{ (suite connue, savoir refaire en passant à la forme exponentielle)}\end{aligned}$$
Puisque $\frac{1}{e} < 1$, u_n est un terme général de série convergente.

3. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!^\alpha (2n)!}{n!^\alpha (2(n+1))!} \\ &= \frac{n!^\alpha \times (n+1)^\alpha \times (2n)!}{n!^\alpha (2n)!(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^\alpha}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\sim \frac{n^\alpha}{4n^2}\end{aligned}$$

Raisonnons par disjonction de cas.
- Si $\alpha > 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to +\infty$ et la série diverge (grossièrement).
- Si $\alpha < 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$ et la série converge.
- Si $\alpha = 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{1}{4} < 1$ et la série converge.

Conclusion : la série converge si, et seulement si, $\alpha \leq 2$