

Feuille d'exercices n°20

Familles libres, génératrices, bases

Exercice 1. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

1. $S_1 = ((1, 1, 0), (2, 1, 2))$
2. $S_2 = ((1, 1, 0), (2, 1, 2), (1, 0, a))$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a)
3. $S_3 = ((1, 0, 0), (a, b, 0), (c, d, e))$ avec a, b, c, d, e réels (on discutera suivant leur valeur)
4. $S_4 = ((1, 1, 3), (3, 4, 5), (2, 5, 7), (8, 1, 9))$

◇ **Exercice 2.** Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z + t = 2x + y - 3t = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

Exercice adaptable : on peut changer le nombre de variables, le nombre d'équations, les coefficients ... et recommencer jusqu'à savoir faire sans réfléchir !

Exercice 3. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1)$.

◇ **Exercice 4.** Montrer que $P_1(x) = (x - 1)^2$, $P_2(x) = x^2$ et $P_3(x) = (x + 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et donner les coordonnées de $P(x) = x^2 + x + 1$ dans cette base.

Exercice 5. Soit E de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose pour tout $i \in [1; n - 1]$: $u_i = e_{i+1} - e_i$ et $u_n = e_n + e_1$

1. Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E
2. Déterminer les coordonnées de e_1 dans cette base.

Exercice 6. Soit F le sous espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^0([0; 2])$ des fonctions affines sur $[0; 1]$ et affines sur $[1; 2]$. Montrer que F est effectivement un sous-ev de E et en trouver une base.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si oui, les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en extraire une base, si non, exhiber un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille.

- | | |
|--|--|
| — $\mathcal{F}_1 = ((2, 4, 3), (1, 5, 7))$ | — $\mathcal{F}_4 = ((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$ |
| — $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$ | — $\mathcal{F}_5 = ((1, 1, 0), (2, 0, 1), (3, 1, 1), (1, 0, 2))$ |
| — $\mathcal{F}_3 = ((9, -3, 7), (1, 8, 8), (5, -5, 1))$ | |

Dimensions

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x + y = 0 \text{ et } t = -x + 3z\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + 2y + 3z + t = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Donner une base de F , une base de G , déterminer la dimension de ces deux espaces.
3. Déterminer $F \cap G$ et en donner une base. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 9. Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. $E_1 = \{(x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ | 5. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a + b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ |
| 2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ | |
| 3. $E_3 = \text{Vect}((1, 1, -1), (-1, 1, 5), (1, 2, 1))$ | 6. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } y + z - 2t = 0 \right\}$ |
| 4. $E_4 = \text{Vect}((X - 1)^2, (X + 1)^2, X)$ | 7. $H = \text{Ker}(M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M + {}^t M)$ |

Supplémentaires, sommes directes ou non

Exercice 10. Trouver deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ en somme directe.

Exercice 11. Soient $v_1 = (2, 1, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 2, 3, 0)$ et $v_4 = (2, -1, 3, 7)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soit $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E .
2. Donner un vecteur v_5 tel que (v_1, v_2, v_3, v_5) soit une base de $\mathbb{R}^4$. En déduire un supplémentaire F de E dans $\mathbb{R}^4$.

◇ **Exercice 12.** Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z - 2t = 0\}$ et $E' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 2z\}$

1. Déterminer une base de E . Quelle est la dimension de E ?
2. Trouver un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.
3. Mêmes questions pour E' .

◇ **Exercice 13.** Soient $a = (3, 2, 1, 4)$, $b = (2, 2, 2, 6)$, $c = (4, 2, 0, 2)$ et $d = (-1, 0, 1, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Posons $F = \text{Vect}(a, b)$ et $G = \text{Vect}(c, d)$.

1. Montrer par double inclusion que $F = G$
2. Que dire de $F + G$? $F \cap G$? F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 14.

1. Montrer que $(1, (X+1), \dots, (X+1)^n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que l'ensemble F des polynômes de E qui s'annulent en -1 est un sous espace-vectoriel de E .
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

Plus théorique

◇ **Exercice 15.** Vrai ou faux ? (Justifier par une preuve ou un contre-exemple).

1. Si $F \oplus G = F \oplus H$, alors $G = H$
2. Si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, alors $F \oplus G = E$

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel de dimension n et F, G deux espaces vectoriels de même dimension $p \leq n$. Montrer par récurrence que F et G admettent un supplémentaire commun H (i.e. $F \oplus H = G \oplus H = E$)

Exercice 17. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, comparer les s.e.v.

1. $F = \text{Vect}(1, \sin, \cos, \sin(2\cdot), \cos(2\cdot))$
2. $G = \text{Vect}(1, \sin, \cos, \cos^2, \sin^2, \cos(\cdot) \cdot \sin(\cdot))$

C'est-à-dire : a-t-on $F = G$? $F \subset G$? $G \subset F$?

Exercice 18 (Isomorphismes et dimensions : en prévision du chapitre prochain). Soit E un espace vectoriel dont $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base. On suppose que F est un e.v. et $\Phi : E \rightarrow F$ un **isomorphisme**. On note $\mathcal{B}' = (\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de F .

Indication : on utilisera la caractérisation des bases par l'unicité de l'écriture de $x \in E$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$

Exercice 19 (Dimension infinie). On rappelle qu'un espace est **de dimension infinie** si il n'admet pas de famille génératrice (finie). Montrer qu'il y a équivalence entre :

1. E est de dimension infinie
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille libre de n vecteurs de E .