

CHAPITRE 20 : DIMENSION DES ESPACES VECTORIELS

Algèbre 5

Dans ce qui suit, sauf précision contraire, E est un espace vectoriel quelconque. Dans ce chapitre, aucune démonstration n'est officiellement exigible.

I. Construction de la dimension

1. Premiers exemples : dimension 1 et 2

Définition 1 (Droite vectorielle, plan vectoriel).

- On dit que E est une **droite** si il existe $u \neq 0$ tel que $E = \text{Vect}(u) = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- On dit que E est un **plan** si il existe (u, v) non colinéaires tels que $E = \text{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Exemple. $\mathbb{R}$ est une droite, $\mathbb{R}^2$ un plan. $E_1 = \text{Vect}(1) \subset \mathbb{R}_n[x]$ (ensemble des polynômes constants), $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y - z = 0\}$

Propriété 2. Si E est une droite, alors toute base de E est constituée d'un seul vecteur. De même pour les plans, toutes les bases sont constituées de deux vecteurs.

Démonstration. Pour une droite, en classe. Pour un plan, démonstration à réordonner :

- Par définition, il existe u, v non colinéaires tels que $\mathcal{P} = \text{Vect}(u, v)$
- Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{P}$
- On en déduit $u, v \in \text{Vect}(a, b)$ donc, puisque $a, b \in \text{Vect}(u, v)$, $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v)$
- Puisque $c \in \mathcal{P}$, alors $c \in \text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(a, b)$ et donc a, b, c sont liés ce qui est absurde.
- Supposons par l'absurde que $\mathcal{B}$ ne contient qu'un vecteur a
- Montrons que $\mathcal{B}$ contient deux vecteurs.
- Ainsi, u, v sont colinéaires, ce qui est absurde.
- Supposons par l'absurde que $\mathcal{B}$ contient au moins trois vecteurs libres a, b, c .
- Soit $\mathcal{P}$ un plan.

- Puisque a, b ne sont pas colinéaires, les deux lignes de la matrice ne sont pas proportionnelles donc $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{\alpha\mu - \beta\lambda} \begin{pmatrix} \mu & -\beta \\ -\lambda & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Ainsi, $\mathcal{B}$ contient exactement deux vecteurs.

- Puisque $a, b \in \mathcal{P}$, il existe $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ tels que $a = \alpha u + \beta v$ et $b = \lambda a + \mu v$ i.e. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

- Alors, puisque $u, v \in \mathcal{P}$, il existe λ, μ tels que $u = \lambda a$ et $v = \mu a$

Remarque. On veut généraliser cette idée à la dimension 3, 4, ... : la dimension est le nombre de vecteurs qui constituent une base. Encore faut-il justifier que ce nombre de vecteurs **ne dépend pas** du choix de la base !

Exercice. Un petit exemple pour comprendre. Si a, b sont des vecteurs quelconques, montrer :

$$\text{Vect}(a; b) = \text{Vect}(2a - 3b; -a + b)$$

2. Rappels : familles libres, liées, génératrices, bases

Définition 3 (Rappels). Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E

- $\mathcal{F}$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \right] \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

- $\mathcal{F}$ est liée si elle n'est pas libre
- $\mathcal{F}$ est génératrice si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x$$

- $\mathcal{F}$ est **une base** de E ssi elle est libre et génératrice.

- Une famille de 1 vecteur est libre ssi ce vecteur est non nul, de deux vecteurs ssi les vecteurs ne sont pas colinéaires, de 3 ssi les vecteurs ne sont pas coplanaires

Exemples.

- $((1,0), (1,1), (2,3))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$
- $((0,2,0), (-1,3,0))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$
- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base (la base canonique!) de $\mathbb{R}_n[X]$

Propriété 4. $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire qu'il existe $i \in [1; n]$ tel que : $x_i \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Dans ce cas :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Démonstration.

Propriété 5. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors chaque élément x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, et réciproquement :

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

On dit que les x_i sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$

Exemple. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1,0)$ dans la base $((2;1); (-1;3))$

3. Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète

♡

Théorème 6 (Base extraite). Si $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E , alors elle contient une base de E

Exercice. Extraire une base de $\mathbb{R}^3$ parmi les vecteurs de $\mathcal{G} = ((-1;2;3); (2;0;2); (-3;1;-1); (4;6;1))$

♡

Théorème 7 (Base incomplète). Si E admet au moins une base et que $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de E , alors il existe une manière de compléter $\mathcal{L}$ en une base de E .

Exercice. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ contenant $\mathcal{L} = ((-1;0;4); (2;1;0))$

Démonstration. Non exigible, culturel :

1. **Théorème de la base extraite** Montrons ce résultat par récurrence sur n .

- Si $n = 1$, alors $\mathcal{G} = (x_1)$ est une famille génératrice de E .
 Si $x_1 = 0_E$, alors $E = \text{Vect}(0) = \{0\}$ et l'ensemble nul admet $\emptyset \subset \mathcal{G}$ comme base.
 Si $x_1 \neq 0_E$, alors $E = \text{Vect}(x_1)$ et (x_1) est une famille libre, donc une base de E , extraite de $\mathcal{G}$. La propriété est initialisée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout espace vectoriel E et toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ génératrice de E on puisse extraire une base. Soit $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille génératrice de E .
 Si $\mathcal{G}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est une base, et on a terminé.
 Si $\mathcal{G}$ est liée, alors il existe un vecteur pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à réordonner, que $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Alors, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi, $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E composée de n vecteurs. **Par hypothèse de récurrence**, il existe une base de E extraite de $(x_1, \dots, x_n)$ et la propriété est héréditaire.
- Ainsi, pour tout entier n , toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ génératrice de E contient une base de E .

2. **Théorème de la base incomplète** Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Alors

- Si $\mathcal{L}$ engendre E , alors c'est une base de E et on a terminé.
- Si $\mathcal{L}$ n'engendre pas E , alors il existe au moins un vecteur e de $\mathcal{G}$ qui n'est pas dans $\text{Vect}(\mathcal{L})$ (car $\mathcal{G}$ engendre E !). Alors $\mathcal{L} \cup \{e\}$ est toujours une famille libre. On réitère ce procédé jusqu'à obtenir une famille génératrice. Puisque $\mathcal{G}$ est une famille finie, l'algorithme termine, et à ce moment là $\mathcal{L}$ est une base.

4. Outils pour la dimension

Théorème 8. Si $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

♣ *Démonstration.* Admise. Par récurrence : initialisation en classe avec $n=1$ pour comprendre de quoi on parle.

Théorème 9 (Corollaire).

- Si $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de E , alors toute famille de n vecteurs, avec $n > p$, est liée.
- Si $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_n)$ est libre et $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_p)$ génératrice, alors $n \leq p$

Définition 10 (Dimension). Soit E un espace de dimension finie, c'est-à-dire qui admet au moins une base. Alors, toutes les bases ont le même cardinal n . On appelle n la **dimension de E** .

Démonstration. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases, appliquer le théorème admis précédent.

- Un espace de dimension 0 est nul : $\{0\} = \text{Vect}(\emptyset)$

Exemples.

- $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ aussi.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = x - y + 2z = 0\}$ est de dimension 1
- L'ensemble des matrices symétriques de taille 3 est de dimension 6.

Propriété 11 (Caractérisation des bases). Si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs dans un espace E de dimension n , alors il y a équivalence entre

1. $\mathcal{F}$ est libre
2. $\mathcal{F}$ est génératrice
3. $\mathcal{F}$ est une base

Remarque. En pratique, on se contentera donc de montrer qu'une famille est libre et qu'elle a le bon cardinal !

Exemple. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On peut exprimer les vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1 := ((2; -1), (4; 3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Exercice.

2. Montrer que $\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

♡ **Définition 12** (Rang). Si $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$, on appelle **rang de $\mathcal{F}$** la dimension de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque. Cette dimension est inférieure ou égale à p . C'est la taille de la plus grande sous-famille libre de $\mathcal{F}$.

Exemple. Rang de la famille $\mathcal{F} = ((-1, 1), (2, 0), (3, 1))$

5. Dimension des espaces usuels

Une relecture des bases canoniques du chapitre 15 (à connaître !)

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n
- $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$ (penser aux fonctions affines !)
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2
- Plus généralement, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}[x]$ sont de dimension infinie

Remarque. Penser la dimension comme un nombre de «degrés de liberté» : paramètres sur lesquels je peux agir sans contrainte. Exemple : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x - y\}$. z n'est pas un paramètre «libre»

II. Dimension d'un sous-espace vectoriel

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension n

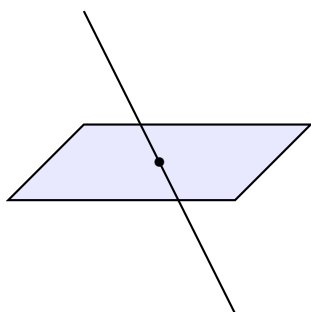
Propriété 13.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq n$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim(F) = n$, alors $F = E$

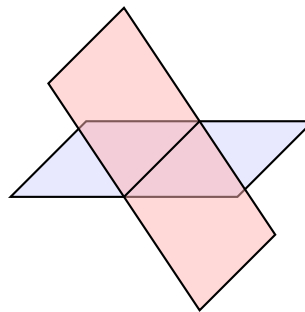
1. Sommes de sous-espaces vectoriels

Illustration : Dans les deux exemples, $F + G = \mathbb{R}^3$

$$F \cap G = \{0\}$$



$F \cap G$ est une droite



Définition 14 (Rappel). Si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E , on définit :

$$F + G = \{x + y | (x, y) \in F \times G\}$$

Un élément de $F + G$ est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

♡

Théorème 15 (Formule de Grassmann). Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration. En complétant une base de $F \cap G$ («concaténation des bases» à comprendre)

Propriété 16 (Cas particuliers). Si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Si en particulier F et G sont supplémentaires, alors $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E) = n$

♡

Propriété 17 (Inspiré de la démonstration). Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(f_1, \dots, f_q)$ alors :

$$F + G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$$

Exemple. $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est une base de $\text{Vect}((1, 0, 0)) + \text{Vect}((0, 1, 0))$ (dessin !)

2. Supplémentaires

Propriété 18. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors il y a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E
2. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$
3. $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$

Démonstration. Par concaténation des bases.

Remarque. Le plus souvent, on choisira par exemple le point numéro 2 plutôt que la méthode du chapitre 15 par analyse-synthèse (à bien comprendre quand même!). On ne peut en revanche pas y échapper pour savoir comment un vecteur quelconque se décompose sur les deux espaces.

Propriété 19 (Variante avec k sous-e.v.). Si $F_1, \dots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , il y a équivalence entre :

1. $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$
2. $E = \sum_{i=1}^k F_i$ et $\sum_{i=1}^k \dim(F_i) = n$

Théorème 20 (Tout sev admet un supplémentaire). Si E est de dimension finie et que F est un sous-espace vectoriel de E , alors F admet un supplémentaire G et $\dim(G) = n - \dim(F)$

Remarque. Et si F n'est pas de dimension 0 ou n , il admet même plusieurs (une infinité de) supplémentaires.

Exemple. Déterminer un supplémentaire de $G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b - d = 0\}$

Exercice (Vrai / Faux). Dans $\mathbb{R}^3$:

- | | |
|--|--|
| 1. Deux droites sont toujours supplémentaires l'une de l'autre | 4. Deux plans peuvent être supplémentaires l'un de l'autre |
| 2. Deux droites peuvent être supplémentaires l'une de l'autre | 5. Une droite et un plan sont toujours supplémentaires l'un de l'autre |
| 3. Deux plans sont toujours supplémentaires l'un de l'autre | 6. Une droite et un plan peuvent être supplémentaires l'un de l'autre |