

XXI. SEMAINE 21 : 23 - 27 MARS

Contenus :

1. Rappels sur les espaces vectoriels : notions de sous-espace vectoriel, intersection / somme de sev, familles libres, liées, génératrices, bases, coordonnées, ...
2. Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète. Les démonstrations sont admises.
3. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre, alors $\mathcal{L}$ contient moins de vecteurs que $\mathcal{G}$. Conséquences sur le nombre de vecteurs dans une base. Notion de dimension. Rang d'une famille de vecteurs.
4. Caractérisation des bases en dimension finie.
5. Formule de Grassmann. Cas particulier des sous-espaces vectoriels en somme directe. Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
6. Les deux prochaines semaines : on continue l'algèbre linéaire en ajoutant le programme sur les applications linéaires en dimension finie.

Questions de cours :

1. En admettant qu'une famille libre a moins de vecteurs qu'une famille génératrices, montrer que toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.
2. Montrer qu'une famille est une base en montrant qu'elle est libre / génératrice + nombre de vecteurs dans un espace de référence ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[x], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)
3. Montrer que $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z + t = 3x - z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et la dimension.
À adapter avec un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5$ régi par une à trois équations linéaires.
4. Énoncé et démonstration de la formule de Grassmann.
5. Montrer que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors pour tout $k \in [1; n]$, $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E .