Devoir Maison n°14 - Une valeur étonnante

Dans ce problème, on étudie la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier la limite de la suite (S_n). On considère pour tout entier $p \geq 0$ les deux intégrales :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \quad ; \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t$$

1. **Introduction :** calculer la valeur de I_0 et de J_0.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \\ &= \frac{\pi^3}{24} \end{aligned}$$

2. **Convergence de la suite** (J_p/I_p)

   (a) Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, établir l'inégalité :

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

   On pourra utiliser deux dérivations

   Posons $f : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. f est deux fois dérivable et pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\pi}{2}\cos(t) - 1 \\ f''(t) &= -\frac{\pi}{2}\sin(t) \end{aligned}$$

   Pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $f''(t) \leq 0$. Ainsi, f' est décroissante et $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 \geq 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \leq 0$ On en déduit qu'il existe un réel $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que le tableau de variations de f soit le suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

   Ainsi, f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,i.e. : $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\pi}{2}\sin(t) \geq t$

   (b) En déduire pour tout $p \geq 0$,

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$$

   Pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, d'après la question précédente : $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$ donc $t^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\sin(t)\right)^2$ (croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$).

En multipliant par $\cos^{2p}(t)$ qui est positif, puis par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
J_p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)dt \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t)\cos^{2p}(t)dt \\
&\leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{2p}(t)dt \\
&\leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}) \text{ par linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

(c) En intégrant par parties, établir une relation de récurrence entre I_{p+1} et I_p.
Indication : on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ *et* $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$
Soit $p \in \mathbb{N}$. Les fonctions sin et $\cos^{2p+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc :

$$\begin{aligned}
I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}(t)\cos(t)dt \\
&= \left[\cos^{2p+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\times(2p+1)\times(-\sin(t))\times\cos^{2p}(t)dt \\
&= 0 + (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2p}(t)dt \\
&= (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{2p}(t)dt \\
&= (2p+1)(I_p - I_{p+1})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p}$ ou encore : $I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}I_p$

(d) Déduire des résultats précédents :

$$\frac{J_p}{I_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

D'après les questions *b* et *c*, pour tout $p \geq 0$,

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}) = \frac{\pi^2}{4}(I_p - \frac{2p+1}{2p+2}I_p) = \frac{\pi^2}{8(p+1)}I_p$$

Ainsi, puisque I_p est toujours strictement positive (intégrale d'une fonction continue positive et non nulle) :

$$0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{8(p+1)}$$

D'après le théorème des gendarmes, puisque $\frac{1}{p+1} \to 0$, alors : $\boxed{\frac{J_p}{I_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$

3. **Convergence et limite de la suite** (S_n)

(a) En intégrant deux fois par parties, montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$I_p = p\left((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p\right)$$

Pour passer de I_p à J_p, on va tenter deux intégrations par partie en primitivant 1 en t puis t en $\frac{t^2}{2}$. Les fonctions polynômiales et les fonctions trigonométriques étant de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrations par parties sont licites et pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)dt \\
&= \left[t\cos^{2p}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times (2p) \times (-\sin(t)) \times \cos^{2p-1}(t)dt \\
&= 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2p-1}(t)dt \\
&= 2p\left(\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}(\cos(t)\cos^{2p-1}(t) + \sin(t)(2p-1)(-\sin(t))\cos^{2(p-1)}(t))dt\right) \\
&= 2p\left(0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2p}(t)dt + (2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\sin^2(t)\cos^{2(p-1)}(t)dt\right) \\
&= p(-J_p + (2p-1)(J_{p-1} - J_p) \\
&= p((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p)
\end{aligned}$$

(b) En déduire :

$$\forall p \geq 1, \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$$

Soit $p \geq 1$. *Maintenant, il serait temps d'avoir le réflexe d'introduire toutes ces variables sans se poser de questions !*

$$\begin{aligned}
I_p = p((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p) &\iff I_p = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2J_p \\
&\iff J_p = \frac{1}{2p^2}\left(p(2p-1)J_{p-1} - I_p\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}\left(p(2p-1)\frac{J_{p-1}}{I_p} - 1\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} &= \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{2p-1}{2p}\frac{J_{p-1}}{I_p} + \frac{1}{2p^2} \\
&= \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{2p-1}{2p}\frac{J_{p-1}}{\frac{2p-1}{2p}I_{p-1}} + \frac{1}{2p^2} \text{ d'après la question 2c} \\
&= \frac{1}{2p^2}
\end{aligned}$$

(c) En utilisant les valeurs de J_0 et I_0 et la relation de la question précédente, déterminer la limite ℓ de la suite (S_n)

Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \\
&= 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p^2} \\
&= 2\sum_{p=1}^{n} \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} \text{ d'après la question précédente} \\
&= 2\left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}\right) \text{ en reconnaissant un télescopage}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{J_0}{I_0} = \frac{\pi^3 \times 2}{24 \times \pi} = \frac{\pi^2}{12}$ et d'après la question 2d, $\frac{J_n}{I_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On en déduit :

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2 \times \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

(d) Écrire un programme en Python qui demande à l'utilisateur un entier n et affiche le premier entier m tel que

$$|S_m - \ell| < 10^{-n}$$

```
from math import pi, abs
n = int(input("entrer un entier"))
eps = 10**(-n)
l = pi**2/6
s = 0
m = 0
while abs(s - l) > = eps :
    m = m + 1
    s = s + (1/m**2)
print(m)
```

Mais qu'est-ce que π vient faire ici ? Cliquez sur le PDF pour une explication vidéo dans le monde de la physique.