Devoir Maison n°15 - deux exercices EDHEC sur les intégrales impropres

I. Exercice 1 - Une intégrale à paramètre (EDHEC 2004)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [1;+\infty[$, $g_x(t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ et, lorsque c'est possible, $f(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t)dt$

1. Déterminer un équivalent de $g_x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   On pourra distinguer les cas : $x < 0, x = 0, x > 0$
2. Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0;+\infty[$
3. Montrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$
4. (a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$
   (b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, pour tout $t \in [1;+\infty[$, simplifier l'expression : $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}$. Établir ensuite :
   $$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$$
   (c) En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2)}{x}$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$
5. (a) Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, 0 \leq \frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.
6. Dresser le tableau de variations de f.

II. Exercice 2 : Une suite d'intégrales (EDHEC 2007)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx$ et $w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx$
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$
   (c) Donner la limite de la suite (u_n)
3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$
   (a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ est une intégrale convergente.
   (b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx \leq I$
   (c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   (d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.