

XXII. SEMAINE 22 : 30 MARS - 3 AVRIL

Contenus :

1. Dimension d'un espace vectoriel. Théorème de la base extraite, de la base incomplète. Les démonstrations sont admises.
2. Caractérisation des bases en dimension finie.
3. Formule de Grassmann. Cas particulier des sous-espaces vectoriels en somme directe. Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
4. Rappels sur les applications linéaires (définition, exemples, noyau, image, lien avec l'injectivité et la surjectivité).
5. Rang d'une application linéaire. Caractérisations des isomorphismes en dimension finie.
6. Nous avons commencé à travailler sur les matrices de vecteurs et d'applications linéaires dans une base. Définition de la matrice $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$ de u dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. **Pas de propriétés vues ni d'exercices** au delà de «trouver la matrice d'une application linéaire dans des bases données».

Questions de cours :

1. Montrer que $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z + t = 3x - z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et la dimension.
À adapter avec un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5$ régi par une à trois équations linéaires.
2. Énoncé et démonstration de la formule de Grassmann
3. Montrer que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors pour tout $k \in [1; n]$, $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E .
4. Énoncé et démonstration de la formule du rang.
5. Montrer que si $\dim(E) = \dim(F)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors il y a équivalence entre u injective, u surjective et u bijective.
6. Donner la définition de matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. *On pourra donner ensuite un exemple d'application dont trouver la matrice dans des bases données.*