

Feuille d'exercices n°20

Exercice 6. Soit F le sous espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^0([0; 2])$ des fonctions affines sur $[0; 1]$ et affines sur $[1; 2]$. Montrer que F est effectivement un sous-ev de E et en trouver une base.

Soit f une fonction de F . Il existe des réels a, b, c, d tels que f s'écrive :

$$f : x \mapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x \in [0; 1] \\ cx + d & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$$

Par ailleurs, puisque f est continue : $a + b = c + d$, i.e. par exemple $d = a + b - c$. Ainsi, f est combinaison linéaire des fonctions :

$$g : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases} \quad ; \quad h : x \mapsto 1 \quad ; \quad k : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1] \\ x - 1 & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$$

$F = \text{Vect}(g, h, k)$ et $\dim(F) = 3$

Exercice 9. Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Ces deux matrices n'étant pas proportionnelles, elles forment une base de F , qui est donc de dimension 2

2. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } y + z - 2t = 0 \right\}$
 $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = -2y - z \\ y = -z + 2t \end{cases}$$

Ainsi, $G = \left\{ \begin{pmatrix} z - 4t & -z + 2t \\ z & t \end{pmatrix} \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

3. $H = \text{Ker} (M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M + {}^T M)$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $M \in H \iff M + {}^T M = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0 \iff$
 $\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ainsi, $M \in H \iff a = d = 0$ et $b + c = 0$, i.e.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $H = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et cette matrice étant non nulle, $\dim(H) = 1$

Exercice 10. Trouver deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ en somme directe.

Il y a **plein** de réponses possibles, le plus simple étant : $F = \text{Vect}((1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0)) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 1)) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0\}$

Exercice 11. Soient $v_1 = (2, 1, 3, 4), v_2 = (0, 1, 0, 1), v_3 = (2, 2, 3, 0)$ et $v_4 = (2, -1, 3, 7)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soit $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E .

$v_4 = 2v_1 - v_2 - v_3$ donc $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. De plus, on vérifie que (v_1, v_2, v_3) forme une famille libre (**à savoir faire**). Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une base de E .

2. Donner un vecteur v_5 tel que (v_1, v_2, v_3, v_5) soit une base de $\mathbb{R}^4$. En déduire un supplémentaire F de E dans $\mathbb{R}^4$.

Il y a plein de choix, mais on peut prendre $v_5 = (1, 0, 0, 0)$ et $F = \text{Vect}(v_5)$

Exercice 14.

1. Montrer que $(1, (X+1), \dots, (X+1)^n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Cette famille contient $n+1$ vecteurs et E est de dimension $n+1$. Il suffit donc de montrer, au choix, que la famille est libre ou génératrice.

- Méthode 1 : famille libre. $(1, X+1, \dots, (X+1)^n)$ est une famille de degrés étagés, donc libre.
- Méthode 2 : famille génératrice. D'après la formule de Taylor, tout polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ s'écrit :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(-1)}{k!} (x+1)^k$$

C'est donc une combinaison linéaire des vecteurs $(1, \dots, (x+1)^n)$.

2. Montrer que l'ensemble F des polynômes de E qui s'annulent en -1 est un sous espace-vectoriel de E .

Soit $P \in E$. Il existe des coefficients $a_0, \dots, a_n$ tels que $P = a_0 + a_1(x+1) + \dots + a_n(x+1)^n$. En évaluant en -1 , $P \in F \iff a_0 = 0 \iff P \in \text{Vect}(x+1, \dots, (x+1)^n)$ donc F est un sous-espace vectoriel engendré par $x+1, \dots, (x+1)^n$

3. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

On en déduit que $\text{Vect}(1)$ est un supplémentaire de F dans E .

◇ **Exercice 15.** Vrai ou faux ? (Justifier par une preuve ou un contre-exemple).

1. Si $F \oplus G = F \oplus H$, alors $G = H$

Faux. Prenons un contre exemple : $F = \text{Vect}((1;0)), G = \text{Vect}((0;1))$ et $H = \text{Vect}((1;1))$. $F \oplus G = F \oplus H = \mathbb{R}^2$ mais $G \neq H$.

2. Si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, alors $F \oplus G = E$

Faux. Si F, G ne sont pas des sous-espaces vectoriels de E c'est clairement faux. Mais on peut aussi prendre comme exemple $F = G = \text{Vect}((1;0))$ dans $\mathbb{R}^2$. $\dim(F) + \dim(G) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ mais $F + G = F \neq \mathbb{R}^2$.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel de dimension n et F, G deux espaces vectoriels de même dimension $p \leq n$. Montrer par récurrence que F et G admettent un supplémentaire commun H (i.e. $F \oplus H = G \oplus H = E$)

Dans cet exercice un peu technique, on va faire une **récurrence descendante** sur la dimension p de F et G .

- **Initialisation** Pour $p = n$. On suppose alors $F = G = E$. $H = \{0\}$ est un supplémentaire commun à F et à G .
- **Hérédité.** Soit p un entier tel que tous F, G sev de E de dimension p aient un supplémentaire commun. Prenons F et G des sous-espaces vectoriels de E de dimension $p-1$. Puisque F, G ne sont pas de dimension n , alors $F \cup G \neq E$. Il existe donc un vecteur $a \in E$ qui n'appartient ni à F , ni à G . Posons $H_1 = \text{Vect}(a)$. Alors, puisque $a \notin F$, $F \cap H_1 = \{0\}$, de même pour G et donc $F \oplus H_1, G \oplus H_1$ sont de dimension p . Par hypothèse de récurrence, ces deux sev de E de dimension p admettent un supplémentaire commun H_2 . Posons $H = H_1 + H_2$ et montrons que c'est un supplémentaire commun à F et à G .
 - $F \oplus H_1$ et H_2 sont supplémentaires dans E , donc $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. Ainsi, $\dim(H) = 1 + \dim(H_2) = 1 + n - p = n - (p-1)$
 - Soit $x \in E$. Puisque $(F \oplus H_1) \oplus H_2 = E$, alors il existe f, h_1, h_2 dans F, H_1, H_2 tels que $x = f + h_1 + h_2 = f + (h_1 + h_2)$. Ainsi, $F + H = E$. De même $G + H = E$.
 Ainsi, $H \oplus F = H \oplus G = E$ et la récurrence est établie.
- Ainsi, si F et G ont la même dimension, ils admettent un supplémentaire commun.

Exercice 17. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, comparer les s.e.v.

1. $F = \text{Vect}(1, \sin, \cos, \sin(2\Box), \cos(2\Box))$
2. $G = \text{Vect}(1, \sin, \cos, \cos^2, \sin^2, \cos(\Box) \cdot \sin(\Box))$

On rappelle pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Ainsi, $1, \sin, \cos, \sin(2\Box)$ et $\cos(2\Box)$ sont dans G et donc $F \subset G$. Réciproquement, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ donc $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Ainsi, $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ donc $\sin^2 \in F$. De même, $\cos^2(x) = \cos(2x) + \sin^2(x)$ et puisque $\sin^2 \in F$, $\cos^2 \in F$. Finalement, $\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ donc $\cos \cdot \sin \in F$. Ainsi : $\boxed{F = G}$.

C'est-à-dire : a-t-on $F = G$? $F \subset G$? $G \subset F$?

Exercice 19 (Dimension infinie). On rappelle qu'un espace est **de dimension infinie** si il n'admet pas de famille génératrice (finie). Montrer qu'il y a équivalence entre :

1. E est de dimension infinie
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille libre de n vecteurs de E .

Raisonnons par double implication. Si E est de dimension finie n , alors on a montré qu'il n'existe pas de famille libre de $n + 1$ vecteurs. Ainsi, la deuxième propriété implique la première. Supposons maintenant qu'il existe une plus grande famille libre $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$. Puisque $\mathcal{F}$ est la plus grande famille libre, pour tout vecteur $x \in E$, $(e_1, \dots, e_n, x)$ contient $n + 1$ vecteurs et est donc une famille liée. Puisque $\mathcal{F}$ est libre, c'est donc x qui s'exprime en fonction de $(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi, $\mathcal{F}$ engendre E et donc c'est une base de E : E est de dimension finie. On a ainsi montré la deuxième implication.