

CHAPITRE 21 : APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

Algèbre 6

Cadre : on étudie des applications linéaires $u : E \rightarrow F$ où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie

Rappel : ça signifie que pour tous réels λ, μ et pour tous $x, y \in E$, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$ et en généralisant :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, u\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u(x_k)$$

En prenant E, F de dimensions finies, on exclut certains exemples du chapitre 16 comme : la dérivation des fonctions $\mathcal{C}^1$, l'intégration sur $[0; 1]$, le polynôme dérivé ou la dérivée discrète, la sommation de séries convergentes, etc.

I. Rang d'une application linéaire

1. Définition

Définition 1. Si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire, on appelle **rang** de u la dimension de l'image de u :

$$rg(u) = \dim(\text{Im } u)$$

Propriété 2. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ est un vecteur de E , alors :

$$u(x) = x_1 u(e_1) + \dots + x_n u(e_n)$$

Ainsi, l'image des vecteurs d'une base **détermine entièrement** u

Propriété 3. Si $(e_1, \dots, e_n)$ engendre E alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ engendre $\text{Im } u$, ie $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$

On en déduit :

$$\dim(\text{Im } u) \leq \dim(E)$$

Comme on a aussi $\text{Im } u \subset F$, $rg(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$

Démonstration. C'est une reformulation de la propriété précédente.

Remarque. Ainsi, entre l'ensemble de départ et l'ensemble image de u , on ne peut que «perdre» des dimensions. On va même préciser comment (combien).

2. La formule du rang

♥ **Propriété 4** (Formule du rang). Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors :

$$\dim E = rg(u) + \dim(\text{Ker}(u))$$

Démonstration. En faisant intervenir un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ et le :

Lemme : si u est injective, alors l'image par u d'une famille libre de E est libre dans F

Exemples.

1. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ définie par $f(P) = P'$. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension. f est-elle injective ? Donner le rang de f . f est-elle surjective ?
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z)$. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension. f est-elle injective ? Donner le rang de f . f est-elle surjective ?

3. Caractérisation des isomorphismes

Propriété 5. Il y a équivalence entre :

1. u est bijective de E dans F
2. L'image de toute base de E par u est une base de F
3. Il existe une base de E dont l'image par u est une base de F

Démonstration.

Propriété 6. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $\dim(E) = \dim(F)$, il y a **équivalence** entre :

1. u est bijective de E dans F
2. u est injective
3. u est surjective

Démonstration.

Remarque. On pourra donc montrer que u est un endomorphisme en montrant, par exemple, $\dim(E) = \dim(F)$ et $\text{Ker}(u) = \{0\}$

1. Montrer que $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x - y, 2y + x) \in \mathbb{R}^2$ est un **automorphisme** de $\mathbb{R}^2$.

Exemples. 2. **Contre-exemple en dimension infinie :** Dans $\mathbb{R}[x]$, on définit une application linéaire u en posant pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $u(P) = xP$. Montrer que u est injective mais pas bijective.

Définition 7. On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** si il existe un isomorphisme $u : E \rightarrow F$

Étymologie : «iso» + «morphe» = même forme

Nos deux espaces se correspondent donc point à point : ils peuvent être « transformés » l'un dans l'autre : ils sont isomorphes (H. Poincaré, 1905)

Propriété 8 (Caractérisation). E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$

Démonstration.

♥ *Remarque.* En particulier : tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$!
Par rapport à l'étymologie : tous les plans ont la «même forme», toutes les droites aussi, etc.

4. Hyperplans

Définition 9 (Hyperplan). On dit que H est un hyperplan E si c'est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$, i.e. si H est supplémentaire d'une droite.

Propriété 10 (Caractérisation). Il y a équivalence entre

1. H est un hyperplan de E
2. Il existe une forme linéaire $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle telle que $\text{Ker}(u) = H$

Démonstration.

Remarque. Il y a alors **plusieurs** formes linéaires ayant H comme noyau, proportionnelles entre elles. Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

Exercice (Application aux systèmes linéaires à deux équations).

1. Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E . Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$? On pourra utiliser la formule de Grassman.
2. Soient l_1, l_2 deux formes linéaires non nulles **linéairement indépendantes**. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $F = \{x \in E \mid l_1(x) = l_2(x) = 0\}$?

II. Matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

1. Matrice d'un vecteur dans une base

Exemple. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On appelle $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ la base $((1, 0, 0), (1, -1, 0), (2, -3, 1))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est effectivement une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer les coordonnées des vecteurs $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (2, -3, 1)$ et $x_3 = (-1, -1, -1)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$

Définition 11. Soit $x \in E$ et $\mathcal{B}$ une base de E . On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On

appelle **matrice colonne des coordonnées de x** la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $[x]_{\mathcal{B}}$ cette matrice, ou $X_{\mathcal{B}}$ pour alléger la notation.

Propriété 12. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ dont les coefficients (en colonne) sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}'$. On a alors pour tout vecteur $x \in E$:

$$X_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}}$$

Propriété 13. Pour toutes bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1}$

Démonstration. Avec le **lemme** : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie, pour toute matrice colonne X , $AX = 0$, alors $A = 0$.

Exemple. Dans l'exemple précédent, $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Premiers pas

Exemple. On considère $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x + 3y, x + y - 2z)$

1. Préciser les images des trois vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$

Dans le monde des matrices colonnes dans la base $\mathcal{B}$, appliquer f c'est multiplier par A

3. Préciser les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ de l'exemple précédent.

4. On pose maintenant $\mathcal{C}' = ((-1, 1), (0, 1))$. Montrer que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Exprimer les images de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{C}'$.

Définition 14. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

La **matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** notée $Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u)$, ou $[u]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la k -ième colonne est la matrice colonne des coordonnées de $u(e_k)$ dans la base $\mathcal{C}$

- Reformulation de l'exemple : matrices de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$

- Matrices de l'application identité (de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$, de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$)

Exemples. • Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dans les bases canoniques

- Si $E = F$, u est un **endomorphisme** et $Mat_{\mathcal{B}} := Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ est une matrice **carrée de taille n**

- Si $F = \mathbb{R}$, u est une **forme linéaire** et $Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ est une matrice **ligne**.

Exercice. Montrer que $F: P \mapsto xP'(x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ et préciser sa matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$

Exercice. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-2x - 2y + 2z, -3x - y + 3z, -x + y + z)$.

1. Déterminer la matrice A de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

2. On pose $\mathcal{B} = ((1; 1; 0); (0; 1; 1); (1; 0; 1))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3. Déterminer la matrice D de l'application f dans la base $\mathcal{B}$

Exemple (Projecteur). Si u est un projecteur, $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Im}(u)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\text{Ker}(u)$, alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de E et :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

♥ **Définition 15** (Application linéaire canoniquement associée à M). Si $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, on appelle **application linéaire canoniquement associée à M** l'application $u_M: \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout X par $u_M(X) = MX$.

Propriété 16. Si $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont des bases respectives de E et F , que X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans ces bases, et que $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$

$$y = f(x) \iff Y = MX$$

i.e. $y = f(x) \iff Y_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) \times X_{\mathcal{B}}$

Remarque. On peut «lire» des informations sur l'image de f en regardant la matrice !

♡

Exemple. On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$ définie par $f : X \mapsto MX$.

On lit une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$ «à l'œil nu»

3. Opérations

Exercice. On considère $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \longmapsto (2x + y, x - y) \quad (x, y) \longmapsto (-2x + y, x)$$

1. Déterminer les matrices A et B représentant u et v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer AB et BA .
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $(u \circ v)(x, y)$ et $(v \circ u)(x, y)$. En déduire la matrice de $u \circ v$ et la matrice de $v \circ u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Propriété 17.

1. Si $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ base de E , $\mathcal{B}'$ base de F , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u + \lambda v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u) + \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(v)$$

2. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ bases respectives de E, F, G :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u)$$

Démonstration.

Remarque.

- Ceci justifie *a posteriori* la définition du produit matriciel. Par exemple : l'associativité $(AB)C = A(BC)$ découle de l'associativité $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ qui est évidente.
- L'écriture est de type «relation de Chasles» entre les bases, ce qui justifie que les bases s'écrivent «à l'envers» (toujours cette histoire de variables qui entrent par la droite...)
- Inversibilité «à gauche / à droite» d'une matrice (admise au chapitre 8)

Propriété 18 (Corollaire - immédiat). Si $u \in \mathcal{L}(E, E)$ et que $\mathcal{B}$ est une base de E avec $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = M^k$$

Démonstration. Par récurrence.

4. Rang d'une matrice

Définition 19. On appelle **rang d'une matrice** $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ le rang de la famille des p vecteurs colonnes qui forment M .

Exemple. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2

Exercice. Quel est le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$?

Propriété 20. Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et f l'application linéaire canoniquement associée à M . Alors, $rg(M) = rg(f)$

Démonstration.

Propriété 21 (Admise). Si u est une application linéaire de E dans F , que $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases respectives de E et F et que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u)$,

$$rg(M) = rg(u)$$

Remarque. C'est-à-dire que des matrices qui représentent la même application linéaire (dans des choix différents de bases au départ et à l'arrivée) ont le même rang.

♠ C'est en fait une équivalence.

♡

Propriété 22 (Matrices inversibles). Soient E, F deux espaces vectoriels de même dimension, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases respectives de E et F , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$. Il y a équivalence entre :

1. M inversible
2. f bijective (isomorphisme)
3. $rg(M) = rg(f) = \dim(E) = \dim(F)$

Dans ce cas :

$$M^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f^{-1})$$

Démonstration.

Remarque. On en déduit qu'une matrice carrée M de taille n est inversible ssi elle est de rang n

Exemples. En reprenant les exemples A_1 et A_2 précédents, A_1 est inversible car de rang 2, A_3 n'est pas inversible car de rang $2 < 3$. De même pour les applications linéaires canoniquement associées.

Exemple (Une propriété admise du chapitre 10). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = I_n$. A est inversible d'inverse B .

Propriété 23 (Rang de la transposée - admis). Pour toute matrice M , $rg(M) = rg({}^t M)$

Notation. On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des **matrices inversibles** carrées de taille n .

III. Changement de base

1. Une étude de cas

Exercice. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et u canoniquement associée à M

1. Préciser $u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$. Dans quelle base $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ a-t-on $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}(u)$?
2. On considère $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $u(X_1), u(X_2), u(X_3)$. Que remarque-t-on ?
3. Montrer que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comment s'écrit u dans la base $\mathcal{B}$?
4. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} . Calculer $P^{-1}MP$.

2. Généralisation

♥

Propriété 24. Soit u une application linéaire de E dans F , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ des bases de F . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{C}' \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

où $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ est la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Démonstration.

Exercice. Soit u l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u)$

IV. Cas des endomorphismes : matrices carrées

1. Généralités

Tous les résultats des sections précédentes s'adaptent en particulier au cas $E = F$. Dans ce cas, on peut choisir $\mathcal{C} = \mathcal{B}$: la même base pour l'ensemble de départ et d'arrivée.

Notation. On notera $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ pour $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u)$. Cette matrice est **carrée**.

Propriété 25 (Rappel - binôme de Newton). Si $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ **commutent**, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

2. Polynômes d'endomorphismes

Définition 26 (Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice). Soit P un polynôme défini par : $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

$$1. P(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k$$

$$2. P(f) = \sum_{k=0}^p a_k M^k$$

Exemples.

Propriété 27 (Opérations). Si λ, μ sont des réels, P, Q sont des polynômes, f un endomorphisme, M une matrice carrée, alors

$$1. (\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$$

$$3. (\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M)$$

$$2. (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

$$4. (PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$$

Si $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $P(M) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$.

Démonstration.

Exemple. Si $A = BQ + R$ sont des polynômes, alors $A(M) = B(M) \times Q(M) + R(M)$. Cette propriété est utile en particulier

si $B(M) = 0$, alors $A(M) = R(M)$. Exemple : $A = x^n, B = x(x-1)(x-3)$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque. Nous avons déjà plusieurs méthodes pour calculer la puissance n -ième d'une matrice :

1. Directement pour les matrices diagonales
2. En faisant une conjecture sur les premiers exemples puis récurrence
3. En utilisant la formule du binôme si on écrit M comme somme de deux matrices qui commutent «plus simples» (souvent diagonale + nilpotente)

On a donc une quatrième méthode : trouver un polynôme P tel que $P(M) = 0$.

♡ *Définition 28* (Polynôme annulateur). Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P tel que $P(M) = 0$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de M . De même, si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $P(u) = 0$, on dira que P est un **polynôme annulateur** de u

Exemples (Endomorphismes particuliers). Les **homothéties** sont annulées par $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les **projecteurs** sont annulés par $X^2 - X$. Les **symétries** sont annulées par $X^2 - 1$. Les endomorphismes annulés par un certain X^n , $n \in \mathbb{N}$ sont dits **nilpotents**

Exercice. Soit $n \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un polynôme annulateur de M de degré au plus n^2 .

♠ *Remarque.* Il en existe en fait toujours un de degré au plus n , qui s'appelle *polynôme caractéristique* de M , mais c'est plus difficile à montrer.

Exercice. Soit A une matrice carrée dont $P(X) = X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ est un polynôme annulateur de A . Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.