

Feuille d'exercices n°21

Rang, injectivité, surjectivité, isomorphismes**Exercice 1.** Déterminer le rang des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$M \longmapsto AM - MA$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Déterminer l'image de ϕ
3. Montrer que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.

Exercice 3. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t)$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\text{Ker}(f)$.

◇ **Exercice 4.** Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$(x, y, z) \longmapsto (x + y - z, x - y + 2z)$$

 u est-elle injective? Surjective?

◇ **Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$P \longmapsto (P(0), P(1), P(2))$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$
2. Montrer que f est bijective.
3. Justifier que par 3 points du plan qui ont des abscisses différents passe une courbe de polynôme du second degré
4. De même avec $P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$

Exercice 6 (Suites récurrentes linéaires). Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2. Montrer que $u : F \rightarrow \mathbb{R}^2, (u_n) \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de F
4. Montrer que $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de F

C'est une démonstration, dans un cas particulier, du résultat admis du chapitre 5 sur les suites récurrentes linéaires (ici avec une racine double)

◇ **Exercice 7** (Noyaux itérés). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^p)$.
2. Que peut-on en déduire sur $\text{rg}(f), \dots, \text{rg}(f^p)$?

Exercice 8. Que dire du rang des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

On pourra écrire la forme générale des matrices antisymétriques et raisonner par disjonction de cas.

Exercice 9 (Démonstrations automatiques : un bon exercice de rédaction.). Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On considère les quatre propositions :

1. $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$
2. $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$
3. $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$
4. $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

Montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1). En déduire que les 4 propriétés sont équivalentes.

Exemples géométriques

Exercice 10. On considère $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \right) \in \mathbb{R}^2$

1. Représenter dans le plan les vecteurs de la base canonique et leurs images.
2. Interpréter géométriquement l'action de f
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque. L'interpréter géométriquement.

Exercice 11. On considère $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2y - x, y)$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique puis dans la base $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$
2. Dessiner ces deux vecteurs et leur image, ainsi que les vecteurs de la base canonique et leur image
3. Interpréter géométriquement l'action de f . Calculer $f \circ f$ et préciser pourquoi $\mathcal{B}$ est une base plus intéressante pour l'étudier.

◇ **Exercice 12.** On considère $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \in \mathbb{R}^3$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique
2. Calculer M^2 . Qu'en déduit-on sur f ?
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Les représenter graphiquement dans l'espace.
4. Proposer une base adaptée à l'étude de f , et écrire la matrice de f dans cette base.

Changement de base ou diagonalisation

Exercice 13. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec $P_1(x) = x^2 + x + 1, P_2(x) = x^2 - 1, P_3(x) = x^2 + x$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et donner $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = 3x^2 - 6x + 5$ dans la base $\mathcal{B}'$

◇ **Exercice 14.** Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y, -x + 2z, -x + y + z) \end{array}$

1. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$
3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$
4. Montrer que ϕ est un automorphisme.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A

1. Calculer A^2 . Qu'en déduit-on sur f ?
2. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$
3. Dans la base obtenue en regroupant les vecteurs des deux bases précédentes, comment s'écrit la matrice de f ?

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A - I_n$ ne soit pas inversible et $\Phi : \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A .

Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $\Phi(X) = X$

♠ **Exercice 17** (Équation aux éléments propres). Soit $\Phi : X \mapsto AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Chercher les réels λ et les matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $\Phi(X) = \lambda X$
2. On trouve trois solutions (e_1, e_2, e_3) et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Donner la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$
3. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PMP^{-1}$

Polynômes annulateurs, conséquences

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2
2. En déduire que A est inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Déterminer R_n , le reste de la division euclidienne de x^n par $x^2 - 2x - 3$
 - (b) En déduire une expression de A^n

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) qu'on déterminera tel que $A^n = a_n A + b_n I$

◇ **Exercice 20.** Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit θ une application linéaire en posant : $\theta(e_1) = e_2 + e_3, \theta(e_2) = e_1 + e_3, \theta(e_3) = e_1 + e_2$

1. Déterminer la matrice T de θ dans cette base.
2. Quel est le rang de θ ?
3. Montrer que $X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de θ .

Exercice 21. Que dire des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **diagonales** annulées par le polynôme $X^3 + 2X - 3$?

Autres

Exercice 22 (Endomorphismes cycliques : un cas particulier).

1. **Cas** $n = 3$ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \in \text{Ker}(f^3) \setminus \text{Ker}(f^2)$.
On dit que f est nilpotente d'indice 3
2. **Cas général** Soit E de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tel que $f^n(x) = 0$ et $f^{n-1}(x) \neq 0$
 - (a) Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
 - (b) Préciser la matrice de f dans cette base
 - (c) En déduire une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$

♠ **Exercice 23** (Interpolation de Lagrange, un argument abstrait). Soient n un entier et $(a_0, \dots, a_n)$ des réels distincts. Montrer que $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{matrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire que si $(b_0, \dots, b_n)$ sont des réels, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que :

$$\forall i \in [0; n], P(a_i) = b_i$$

Retrouver ce résultat dans un exercice du chapitre 11

Exercice 24. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

Indication : on pourra montrer qu'une application bien choisie est un automorphisme.