XXIII. Semaine 23 : 6 - 10 avril

Contenus :

1. Dimension d'un espace vectoriel. Théorème de la base extraite, de la base incomplète. Caractérisation des bases en dimension finie.
2. Formule de Grassamnn. Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
3. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisations des isomorphismes en dimension finie (injectivité, surjectivité, image d'une base qui est une base, inversibilité de la matrice, rang)
4. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$, matrice d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ relative aux bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F.
5. Matrices de $u+v$, de λu, de $u \circ v$. Cas particulier de u^k pour les endomorphismes.
6. Relation entre hyperplans et formes linéaires
7. Rang d'une matrice, relation au rang de l'application linéaire associée dans une base.
8. Polynôme appliqué à une matrice, à un endomorphisme. Notion de polynôme annulateur.

Questions de cours :

1. Énoncé et démonstration de la formule du rang.
2. Montrer que si $\dim(E) = \dim(F)$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors il y a équivalence entre u injective, u surjective et u bijective
3. Donner la définition de la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. *On pourra donner ensuite un exemple d'application dont on cherchera la matrice dans des bases données.*
4. Montrer que si $x \in E$ et $X_{\mathscr{B}}, X_{\mathscr{B}'}$ sont les matrices colonnes de x dans les bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$, alors $X_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}}$
5. Énoncé et démonstration de la formule de changement de base (prop 24 du polycopié)
6. Montrer que toute matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet **au moins** un polynôme annulateur (non nul) de degré au plus n^2