Devoir Maison n°15 - deux exercices EDHEC sur les intégrales impropres

I. Exercice 1 - Une intégrale à paramètre (EDHEC 2004)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [1;+\infty[$, $g_x(t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ et, lorsque c'est possible, $f(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t)dt$

1. Déterminer un équivalent de $g_x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
On pourra distinguer les cas : $x<0, x=0, x>0$
Distinguons selon les trois cas :
   - **Si** $x<0$: $x+1<1$ et donc $t^{x+1} = o(t)$. On en déduit : $1+t+t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} t$ et donc $g_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$
   - **Si** $x=0$: $t^{x+1} = t$ et $1 = o(t)$ donc $1+t+t^{x+1} = 2t+o(t) \sim 2t$. Ainsi $g_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t}$
   - **Si** $x>0$: $t = o(t^{x+1})$ et de même $1 = o(t^{x+1})$ donc $1+t+t^{x+1} \sim t^{x+1}$. Ainsi : $g_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$
2. Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0;+\infty[$
À x fixé, g_x est une fonction continue sur $[1;+\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt$ est bien définie si et seulement si $g_x(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Au vu de la question précédente, puisque $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{2t}$ ne sont pas intégrables (critère de Riemann) et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}dt$ est intégrable si $x>0$, alors le domaine de définition de f est $]0;+\infty[$
3. Montrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$
Soient $x,y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leq y$. Alors, $x+1 \leq y+1$ et pour tout $t \geq 1$, $\ln(t) \geq 0$ donc $\ln(t)(x+1) \leq \ln(t)(y+1)$. Par croissance de l'exponentielle, on a donc $\exp((x+1)\ln(t)) \leq \exp((y+1)\ln(t))$ i.e. $t^{x+1} \leq t^{y+1}$
Alors $t^{x+1}+t+1 \leq t^{y+1}+t+1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \geq \frac{1}{1+t+t^{y+1}}$$
Par croissance de l'intégrale :
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{y+1}}$$
i.e. : $f(x) \geq f(y)$ et ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. (a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$
Soit $x>0$. $t \mapsto \frac{1}{t(1+t^x)}$ est une fonction continue sur $[1;+\infty[$. Puisque $x>0$, $\frac{1}{t(1+t^x)} \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ qui est intégrable par critère de Riemann. Ainsi, $g(x)$ est bien définie.
   (b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, pour tout $t \in [1;+\infty[$, simplifier l'expression : $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}$. Établir ensuite :
$$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$$
Soit $x \in]0;+\infty[$ et $t \in [1;+\infty[$.
$$\begin{aligned} \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} &= \frac{1+t^x - t \times t^{x-1}}{t(1+t^x)} \\ &= \frac{t^x+1-t^x}{t(1+t^x)} \\ &= \frac{1}{t(1+t^x)} \end{aligned}$$
Ainsi :
$$g(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\right) dt$$
Attention, les intégrales de $\frac{dt}{t}$ et de $\frac{t^{x-1}dt}{1+t^x}$ étant divergentes, on ne peut pas séparer en deux intégrales. Fixons donc $A>0$ et calculons :
$$\begin{aligned} \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\right) dt &= \int_1^A \frac{dt}{t} - \int_1^A \frac{t^{x-1}}{1+t^x}dt \\ &= [\ln(t)]_1^A - \frac{1}{x}[\ln(1+t^x)]_1^A \\ &= \ln(A) - \frac{1}{x}\ln(1+A^x) + \frac{1}{x}\ln(2) \\ &= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{A^x}{1+A^x}\right) + \frac{1}{x}\ln(2) \end{aligned}$$

Or, $\frac{A^x}{1+A^x} \xrightarrow[A+\infty]{} 1$ et donc $\ln\left(\frac{A^x}{1+A^x}\right) \to 0$. Ainsi :

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)} = \frac{\ln(2)}{x}$$

(c) En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2)}{x}$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$
Pour tout $x > 0$ et $t \in [1;+\infty[$, on a $1+t+t^{x+1} \geq t+t^{x+1}$, donc $\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t+t^{x+1}} = \frac{1}{t(1+t^x)}$. En intégrant :

$$0 \leq f(x) \leq g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit : $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

5. (a) Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, 0 \leq \frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$
D'après les questions précédentes, par linéarité de l'intégrale :

$$\frac{\ln(2)}{x} - f(x) = g(x) - f(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t(1+x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\right) dt$$

Or, pour tout $t \in [1;+\infty[$:

$$\frac{1}{t(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}} = \frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{t(1+t^x)(1+t+t^{x+1})} = \frac{1}{t(1+t^x)(1+t+t^{x+1})}$$

Cette quantité est toujours positive et : $t(1+t^x)(1+t+t^{x+1}) \geq t \times t^x \times t^{x+1} = t^{2x+2}$. Ainsi :

$$0 \leq g(x) - f(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x+2}} dt = \left[-\frac{t^{-(2x+1)}}{2x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2x+1}$$

(b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.
Ainsi, Lorsque $x \to 0^+$, $\frac{\ln(2)}{x} \to +\infty$ et d'après la question précédente, $f(x) \geq \frac{\ln(2)}{x} - \frac{1}{2x+1}$. Par comparaison : $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. Par ailleurs, puisque $\frac{1}{2x+1}$ est négligeable par rapport à $\frac{\ln(2)}{x}$ on en déduit :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\ln(2)}{x}$$

6. Dresser le tableau de variations de f.
f est décroissante et tend vers $+\infty$ en 0, 0 en $+\infty$

II. Exercice 2 : Une suite d'intégrales (EDHEC 2007)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et en $+\infty$:

$$\frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} = o\left(e^{-x}\right)$$

Ainsi, l'intégrale est convergente et donc u_n est bien défini. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (u_n) est bien définie.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx$ et $w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx$

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$
Pour tout $x \geq 1$, $x + \frac{1}{n} \geq 1$ et donc $\frac{1}{x+\frac{1}{n}} \leq 1$. Puisqu'une exponentielle est toujours positive, $\frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq e^{-x}$. Par croissance de l'intégrale :

$$w_n \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

(b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq \frac{1}{e}\ln(n+1)$
Pour $x \in [0;1]$, $e^{-x} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$. Ainsi :

$$v_n \geq \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dx}{x+\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}\left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{e}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{e}(\ln(n+1)-\ln(n)+\ln(n)) = \frac{\ln(n+1)}{e}$$

(c) Donner la limite de la suite (u_n)
Par relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = v_n + w_n \geq v_n \geq \frac{1}{e}\ln(n+1)$. Par comparaison, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$

(a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$ est une intégrale convergente.
La fonction $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0;1]$. Par ailleurs, $\frac{1-e^{-x}}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-(-x)}{x} = 1$. Ainsi, elle se prolonge par continuité et I est une intégrale faussement impropre (donc convergente)

(b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}dx \leq I$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0;1]$, $x+\frac{1}{n} \geq x$. Ainsi, la fonction inverse étant décroissante : $\frac{1}{x+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{x}$. De plus, $-x \geq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$ i.e. $1-e^{-x} \geq 0$. On en déduit :

$$\frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq \frac{1-e^{-x}}{x}$$

On conclut par croissance de l'intégrale.

(c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx - v_n$. Or, $\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx = \left[\ln(x+\frac{1}{n})\right]_0^1 = \ln(n+1)$. On en déduit :

$$0 \leq \ln(n+1) - v_n \leq I$$

i.e. :

$$\ln(n+1) - I \leq v_n \leq \ln(n+1)$$

(d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.
$u_n = v_n + w_n$. Puisque (w_n) est bornée et que $v_n - \ln(n+1)$ aussi, alors que $\ln(n+1) \to +\infty$, $u_n = \ln(n+1) + o(\ln(n)) \sim \ln(n+1) \sim \ln(n)$