Feuille d'exercices n°21

Exercice 8. Que dire du rang des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
Soit M une matrice antisymétrique. Par définition, il existe des réels x, y, z tels que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de M. Considérons des réels x, y, z tels que $xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$ i.e.

$$\begin{cases} & & ay & + & bz & = & 0 \\ -ax & + & & & cz & = & 0 \\ -bx & - & cy & & & = & 0 \end{cases}$$

Supposons dans un premier temps que $a \neq 0$. On peut alors dans la ligne L_3 écrire $aL_3 - bL_2 + cL_1$ et obtenir : $-abx - (-abx) - acy - bcz + acy + bcz = 0$ i.e. $0 = 0$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} ay & + & bz & = & 0 \\ -ax & + & cz & = & 0 \end{cases}$$

Puisqu'on a supposé $a \neq 0$, on en déduit : $y = -\frac{b}{a}z$ et $x = \frac{c}{a}z$ et donc $\boxed{M \text{ est de rang } 2}$
Supposons maintenant $a = 0$. On remarque déjà que les deux premières colonnes sont colinéaires. Il y a alors deux cas : si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, alors la première et la dernière colonne ne sont pas colinéaires et $\boxed{M \text{ est de rang } 2}$. En revanche, si $a = b = c = 0$, alors $M = 0$ et $\boxed{M \text{ est de rang } 0}$.
Il y a donc deux cas pour une matrice antisymétrique : M est la matrice nulle ou bien M est de rang 2.
Remarque : avec d'autres outils, on peut montrer qu'en fait une matrice symétrique est toujours de rang pair.

Exercice 9 (Démonstrations automatiques : un bon exercice de rédaction.)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On considère les quatre propositions :

1. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
2. $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$
3. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
4. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$

Montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1). En déduire que les 4 propriétés sont équivalentes.
Nous avons montré en classe (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Il reste deux implications à démontrer.
$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ Supposons $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. D'après la formule du rang, on en déduit : $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$. Or, on a toujours : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Puisqu'un ensemble est inclus dans l'autre et qu'il y a égalité des dimensions, alors $\ker(f) = \ker(f^2)$.
$\boxed{(4) \Rightarrow (1)}$ Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$ et montrons $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. Soit $y \in \mathrm{im}(f) \cap \ker(f)$. Puisque $y \in \mathrm{im}(f)$, il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Puisque $y \in \ker(f)$, alors $f(y) = 0$ i.e. $f(f(x)) = 0$. On en déduit : $x \in \ker(f^2) = \ker(f)$ et donc $x \in \ker(f)$: $f(x) = 0$ et donc $y = 0$. Ainsi, l'intersection des deux ensembles est réduite à 0.

Exercice 11. On considère $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2y - x, y)$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique puis dans la base $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$
   Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique.
   $$Mat_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   De plus, $f((1, 1)) = (1; 1) = 1(1; 1) + 0(1; 0)$ et $f((1, 0)) = (-1, 0) = 0(1, 1) - 1(1, 0)$. On en déduit :
   $$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Dessiner ces deux vecteurs et leur image, ainsi que les vecteurs de la base canonique et leur image
   Faire des jolis dessins.

3. Interpréter géométriquement l'action de f. Calculer $f \circ f$ et préciser pourquoi $\mathcal{B}$ est une base plus intéressante pour l'étudier.
   f envoie $(1;1)$ sur lui-même et $(1;0)$ sur son opposé : c'est une symétrie, par rapport à la droite $\mathrm{Vect}((1;1))$ et parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}((1;0))$. On vérifie :
   $$(f \circ f)(x,y) = f(f((x,y))) = f((2y-x;y)) = (2y-(2y-x);y) = (x,Y)$$
   Ainsi, $f \circ f = id_{R^2}$ et on retrouve le fait que f soit une symétrie.

Exercice 13. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec $P_1(x) = x^2+x+1, P_2(x) = x^2-1, P_3(x) = x^2+x$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et donner $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$
   Puisque $\mathbb{R}_2[x]$ est de dimension 3, il suffit de montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Soient a, b, c des réels tels que $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$, i.e. $a(x^2+x+1) + b(x^2-1) + c(x^2+x) = 0$, i.e. $(a+b+c)x^2 + (a+c)x + (a-b) = 0$. En identifiant les coefficients du polynôme :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & + & & & c & = & 0 \\ a & - & b & & & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & - & b & & & = & 0 \\ & - & 2b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$$
   $$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right.$$
   Ainsi la famille P_1, P_2, P_3 est libre et c'ets donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Par ailleurs, par définition :
   $$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   On peut maintenant déterminer $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss. On trouve :
   $$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = 3x^2 - 6x + 5$ dans la base $\mathcal{B}'$
   Notons X, X' les matrices colonnes des coordonnées de Q dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. D'après la propriété du cours :
   $$X' = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -20 \end{pmatrix}$$
   $(14;9;20)$ sont donc les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}'$ *(à vérifier en faisant le calcul, je ne l'ai pas fait !)*

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A - I_n$ **ne soit pas inversible** et $\Phi : \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A.
Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que $\Phi(X) = X$
D'après (la contraposée d')une propriété du cours sur les matrices, $A - I_n$ n'est pas inversible si et seulement si il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $(A - I_n)X = 0$,i.e. $AX - I_nX = 0$, i.e. $AX = X$, i.e. $\Phi(X) = X$.

♠ **Exercice 17** (Équation aux éléments propres)**.** Soit $\Phi : X \mapsto AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Chercher les réels λ et les matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ **non nulles** tels que $\Phi(X) = \lambda X$
   (Gros système à paramètres) on trouve $\lambda = -4, 2$ ou 1 et :
   — <u>Pour $\lambda = -4$</u> : $X = a(2;-3;2)$ où $a \in \mathbb{R}$

— Pour $\lambda = 2$: $X = a(-4;-3;2)$ où $a \in \mathbb{R}$
— Pour $\lambda = 1$: $X = a(1;1;1)$ où $a \in \mathbb{R}$

2. On trouve trois solutions (e_1, e_2, e_3) et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Donner la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$
Avec $e_1 = (2;-3;2), e_2 = (-4;-3;2)$ et $e_3 = (1;1;1)$ on trouve :

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PMP^{-1}$
C'est la formule du changement de base avec $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2
$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A + 2I_3$. Ainsi, A est annulée par le polynôme $x^2 - x - 2$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) qu'on déterminera tel que $A^n = a_n A + b_n I$
Sur les premiers termes :
— $A^0 = 0A + 1I$ $(a_0 = 0, b_0 = 1)$
— $A^1 = 1A + 0I$ $(a_1 = 1, b_1 = 0)$
— $A^2 = A + 2I$ $(a_2 = 1, b_2 = 2)$
—

$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A^2 \\ &= A \times (A + 2I) \\ &= A^2 + 2A \\ &= A + 2I + 2A \\ &= 3A + 2I \end{aligned}$$

Méthode 1 : Raisonnons par récurrence : soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et a_n, b_n des réels vérifiant : $A^n = a_n A + b_n I$. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (a_n A + b_n I) \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n(A + 2I) + b_n A \\ &= (a_n + b_n)A + 2a_n I \end{aligned}$$

La récurrence est établie avec les relations de récurrences valables pour tout entier n : $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$
Ici, on a montré la propriété, mais il reste un peu de travail pour établir le terme général des suites (a_n) et (b_n)
Méthode 2 : en utilisant la division euclidienne. D'après le théorème de division euclidienne, il existe pour chaque entier n un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ et un polynôme $R_1[x]$ tels que $x^n = (x^2 - x - 2)Q_n(x) + R_n(x)$. En notant a_n, b_n les réels tels que $R_n = a_n x + b_n$, on obtient :

$$x^n = (x^2 - x - 2)Q_n(x) + a_n x + b_n$$

Évaluons cette égalité en -1 : on trouve $(-1)^n = -a_n + b_n$. Évaluons maintenant cette égalité en 2 : $2^n = 2a_n + b_n$. On en déduit pour tout entier n :

$$a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$$

En évaluant ensuite l'égalité en A :

$$A^n = \frac{1}{3}\left((2^n - (-1)^n)A + (2^n + 2(-1)^n)I_3\right)$$

Exercice 21. Que dire des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **diagonales** annulées par le polynôme $X^3 + 2X - 3$?
On commence par remarquer que si A est diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$, alors pour tout polynôme P, $P(A)$ est diagonale de coefficients diagonaux $P(a_1), \ldots, P(a_n)$. Ainsi, si $A^3 + 2A - 3I_n = 0$, alors pour tout $k \in [|1;n|], a_k^3 + 2a_k - 3 = 0$. Or, le polynôme $x^3 + 2x - 3$ a pour racines 1 et -3. On en déduit que A est une matrice diagonale qui n'a que des 1 et des -3 sur sa diagonale.

Exercice 22 (Endomorphismes cycliques : un cas particulier)**.**

1. **Cas** $n = 3$ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(f^3) \backslash \mathrm{Ker}(f^2)$.
   On dit que f est nilpotente d'indice 3
   C'est simplement la définition : puisque $f^2 \neq 0$, alors il existe un $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$ et puisque $f^3 = 0$, alors $f^3(x) = 0$. Ainsi, $x \in \ker(f^3) \backslash \ker(f^2)$
2. **Cas général** Soit E de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tel que $f^n(x) = 0$ et $f^{n-1}(x) \neq 0$
   (a) Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
   Avec les mêmes arguments qu'à la question précédente, un tel x existe. Par ailleurs, $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ contient n vecteurs, ce qui est la dimension de E : il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Prenons $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des réels et supposons :

   $$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$$

   Appliquons f^{-1} à cette égalité. On trouve : $\lambda_0 f^{n-1}(x) + \lambda_1 f^n(x) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{2n-2}(x) = 0$. Puisque $f^n(x) = 0$, alors il en va de même pour tous les $f^{n+k}(x)$, $k \geq 0$ et donc :

   $$\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$$

   Puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, alors $\lambda_0 = 0$ et donc : $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$. On recommence avec f^{n-2} pour trouver $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_{n-1} = 0$. La famille est libre et c'est donc une base de E.
   (b) Préciser la matrice de f dans cette base
   Par définition, on trouve :

   $$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$
   On en déduit que f est de rang $n-1$. $f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ sont libres dans l'image de f et donc $(f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de $\mathrm{im}(f)$. $f^n(x) = 0$ et donc $f^{n-1}(x) \in \ker(f)$. Puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, la famille composée de ce vecteur est libre et c'est donc une base de $\ker(f)$.

♠ **Exercice 23** (Interpolation de Lagrange, un argument abstrait)**.** Soient n un entier et $(a_0, \ldots, a_n)$ des réels distincts. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire que si $(b_0, \dots, b_n)$ sont des réels, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que :

$$\forall i \in [|0; n|], P(a_i) = b_i$$

Cette application est linéaire (à vérifier si besoin). Puisque $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont de même dimension, il suffit de montrer que Φ est injective. Soit donc un polynôme P vérifiant $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$. P admet ainsi $n+1$ racines distinctes. Puisqu'il est supposé être de degré au plus n, alors P est le polynôme nul. Ainsi, Φ est injective donc bijective.
Ainsi, pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\Phi(P) = (b_0, \dots, b_n)$ i.e : $\forall i \in [|0; n|], P(a_i) = b_i$
Dans le chapitre sur les polynômes, on avait construit explicitement ces polynômes, appelés Polynômes de Lagrange (i.e. une formule pour P en fonction des b_i et des a_i

Exercice 24. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.
Comme dans l'exercice précédent, ce résultat découle d'un simple argument de dimension. Posons f : $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ définie pour tout polynôme Q par : $f(Q) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$. f est linéaire car la dérivation et la somme le sont (à vérifier si besoin !) et f est injective. En effet : pour tout polynôme Q non nul, les dérivées de Q ont un degré strictement inférieures à celles de Q et donc $\deg(P) = \deg(Q)$. Ainsi, si $Q \neq 0$, $\deg(P) \geq 0$ et donc $P \neq 0$.
Puisque f est injective de $\mathbb{R}_n[x]$ dans lui-même, alors f est bijective et on en déduit la propriété demandée.