

## Feuille d'exercices n°22

### Calcul de dérivées successives

**Exercice 1.** Déterminer toutes les dérivées de la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$

**Exercice 2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^{2n}$ .

1. Calculer la dérivée  $n$ ième de  $f$
2. En utilisant  $f(x) = x^n \times x^n$ , calculer la dérivée  $n$ ième de  $f$  d'une deuxième manière
3. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

### Formules de Taylor : applications

**Exercice 3.** Montrer que pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

En déduire, par exemple, un encadrement de  $\cos(1)$

◇ **Exercice 4.** En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral appliqué à  $x \mapsto \ln(1+x)$ , montrer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

### Calcul de DL

**Exercice 5.** Déterminer un développement limité en 0 des expressions suivantes :

- |                                   |   |  |
|-----------------------------------|---|--|
| 1. $e^x + 2 \ln(1+x)$ à l'ordre 3 | 3. $\frac{\cos(x)}{(1+x)^3}$ à l'ordre 3          | 5. $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ à l'ordre 3 |
| 2. $\sin(2x)e^x$ à l'ordre 4      | 4. $\left(\frac{1}{1-x} + 2\right)^2$ à l'ordre 2 | 6. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 2              |

**Exercice 6** (Ailleurs qu'en 0). Déterminer le DL de  $\sqrt{x}$  en 1 à l'ordre 2, de  $\ln(x)$  en 1 à l'ordre 3, de  $\frac{1}{x}$  en 1 à l'ordre 3

**Exercice 7** (Équivalents et limites).

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. Déterminer un équivalent en 0 de : | 2. Déterminer la limite en 0 de :     |
| (a) $e^x - 1 - x$                     | (a) $\frac{e^x - 1 - x \cos x}{x^2}$  |
| (b) $\ln(1+x) - x$                    | (b) $\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$    |
| (c) $(1+x)^{-3} - 1 + 3x$             | (c) $\frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$ |

**Exercice 8** (Convergence d'intégrales). Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1.  $\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$
2.  $\int_0^{+\infty} \left(1 + t \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$
3.  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$

### Autour de la fonction tangente

**Exercice 9** (Directement avec la formule de Taylor-Young).

1. Rappeler les propriétés de parité de la fonction tan.
2. En déduire  $\tan(0)$ ,  $\tan^{(2)}(0)$ . Que vaut  $\tan'(0)$  ?
3. Conclure avec un développement limité de tan en 0 à l'ordre 2.

**Exercice 10** (Une étude de quotient).

1. Donner un développement limité de sin en 0 à l'ordre 3
2. Montrer que  $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
3. En déduire un développement limité de tan à l'ordre 3

**Exercice 11** (En utilisant l'équation différentielle de  $\tan$ ).

- Intégration du développement limité** : Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont  $f'$  admet un développement limité en 0 de la forme :

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

- En utilisant l'unicité du développement limité et la formule de Taylor-Young, exprimer  $a_0, \dots, a_n$  en fonction des dérivées de  $f$  en 0
  - En déduire la forme d'un développement limité de  $f$  à l'ordre  $n+1$  en fonction de  $a_0, \dots, a_n$  et  $f(0)$
  - Premier exemple : si  $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3 + x^2 + o(x^2)$  et  $f(0) = 1$ , donner un développement limité de  $f$  à l'ordre 3 en 0
- Cas de la fonction tangente.**  
On rappelle :  $\tan(0) = 0$ ,  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$  et  $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ .  
En déduire un développement limité de  $\tan^2$  à l'ordre 4, puis de la fonction tangente à l'ordre 5

◇ **Exercice 12.** Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction arctan

### Études de courbes, prolongements de fonctions, recherche d'optimums

**Exercice 13.** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ . Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  en 0 et étudier la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de ce point.

**Exercice 14.** Déterminer les asymptotes et la position par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$

◇ **Exercice 15.** Soit  $f$  définie sur  $] -\infty; 0[ \cup ] 0; 1[$  par  $f(x) = \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ .  
Montrer que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0. Quelle est alors la position relative de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente en ce point ?

### Inégalités de convexité

**Exercice 16** (Inégalité de Bernoulli). Soient  $n \geq 2$  et  $f : x \mapsto (1+x)^n$

- Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et étudier sa convexité
- Montrer : pour tout  $x \geq -1$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$

◇ **Exercice 17.** Soient  $x_1, \dots, x_n \geq 1$ .

- Étudier la convexité de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$
- Montrer :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

**Exercice 18** (Moyennes arithmétique et géométrique). Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  des réels positifs. Montrer :

$$\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

♠ **Exercice 19** (Inégalité des pentes). Soient  $a < b$  deux réels,  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe (sans hypothèse de dérivabilité) et  $c \in ]a; b[$ .

- Faire un dessin de la situation. On pose  $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c))$  : relier  $A$  et  $B$ ,  $A$  et  $C$ ,  $B$  et  $C$ . Que dire des pentes des segments ainsi tracés ?
- Montrer :

$$\forall c \in ]a; b[, \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

- En déduire qu'une fonction convexe est nécessairement continue.

**Applications / Problèmes**

- Exercice 20** (Une étude de suite implicite). 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ . Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n \in ]0; +\infty[$
2. En étudiant pour tout  $n$  le signe de  $f_n(u_{n+1})$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. Montrer que  $(u_n)$  converge.
4. Par l'absurde, montrer que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
5. Dédurre de la relation  $u_n = \frac{1-u_n^5}{n}$  :

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

6. Montrer :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

- Exercice 21** (Ericome 2007). 1. A l'aide de développements limités usuels, montrer qu'au voisinage de 0 :

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

2. (a) Montrer que pour  $k \geq 2 : 2 - e^{\frac{1}{k}} \in ]0; 1[$   
 (b) En déduire le signe de  $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$   
 (c) Pour  $n \geq 2$ , on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \text{ et } u_n = \exp(V_n)$$

Déterminer la limite de  $V_n$  et de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$

3. (a) Montrer :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[ \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right]$$

- (b) Déterminer un équivalent en  $+\infty$  de  $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$   
 (c) En déduire un équivalent de  $u_n$  puis la nature de  $\sum u_n$
4. On pose :  $S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k$
- (a) Étudier le sens de variation de  $(u_n)$   
 (b) Montrer que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.  
 (c) En déduire la nature de  $\sum (-1)^n u_n$

- ♠ **Exercice 22** (Formule de Stirling et le retour de Wallis! Hors programme mais ultra classique!).

On cherche à montrer l'équivalent classique pour la factorielle :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

On pose pour tout entier naturel  $n : W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$

1. Montrer en intégrant par parties que pour tout  $n \in \mathbb{N} : W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$
2. En déduire que pour tout  $p \in \mathbb{N} : W_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$
3. Montrer que la suite  $(W_n)$  est décroissante et en déduire :  $W_{n+1} \sim W_n$  puis  $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
4. Posons  $u_n = \frac{\sqrt{n} n^n e^{-n}}{n!}$ ,  $v_n = \ln(u_n)$ . Montrer que la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$  converge en utilisant un développement limité, puis que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $K$ .
5. En utilisant les intégrales de Wallis, montrer que  $K = \sqrt{2\pi}$