Devoir Maison n°16 - Commutant d'une matrice carrée

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

— $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | AM = MA\}$ le **commutant** de A, i.e. l'ensemble des matrices qui commutent avec A

— $\mathbb{R}[A] = \{P(A) | P \in \mathbb{R}[x]\}$ l'ensemble des **polynômes en** A (qui sont des matrices)

— $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

— $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ et $\mathcal{C}(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lequel des deux est inclus dans l'autre ?
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer $\mathcal{C}(A)$ et en donner la dimension.
   (b) Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré 2.
   (c) A-t-on $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A]$?
3. Soient $d_1, \ldots, d_n$ des réels **distincts** et $A = \text{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ la matrice diagonale qui a $d_1, \ldots, d_n$ sur sa diagonale.
   (a) Déterminer $\mathcal{C}(A)$ et en donner la dimension.
   (b) Montrer que la famille $(I_n, \ldots, D^{n-1})$ est libre.
   (c) A-t-on $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A]$?
4. On pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en supposant que $\dim(\mathcal{C}(A)) = 3$
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(A) \cap \text{Vect}(E_{11}, E_{21}) \neq \{0\}$ par un argument de dimension.
   (b) En déduire $c = 0$
   (c) On montre de même que $\mathcal{C}(A) \cap \text{Vect}(E_{12}, E_{22}) \neq \{0\}$. En déduire une contradiction.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$
   (a) Justifier l'existence d'un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X \neq 0$
   (b) Montrer que la famille $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ est une base de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$
   (c) Soit $M \in \mathcal{C}(A)$. Il existe des réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que $MX = a_0 X + a_1 AX + \ldots + a_{n-1}A^{n-1}X$. Montrer que $M = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_{n-1}A^{n-1}$
   (d) Qu'en déduire sur $\mathcal{C}(A)$ et $\mathbb{R}[A]$?
6. Soit $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que l'ensemble $F(T) = \{MT - TM | M \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{2}$
   (b) On peut donc se donner une base $(M_iT - TM_i)_{1 \leq i \leq r}$ de $F(T)$. On pose $G(T) = \text{Vect}(M_1, \ldots, M_r)$. Calculer la dimension de $G(T)$
   (c) Montrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{C}(T) \cap \mathcal{T}_n(\mathbb{R})) \oplus G(T)$
   (d) En déduire : $\dim(\mathcal{C}(T)) \geq n$.