

Devoir Maison n°17 - Chaîne de Markov (EDHEC 2017 ECE)

Modèle : Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, 4. Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré, selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1
- Lorsque le mobile est sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sommets de façon équiprobable.

Pour tout entier n , on note X_n le numéro du sommet auquel se situe le mobile à l'instant n . Ainsi, $X_0 = 1$.

ÉTUDE DES VARIABLES ALÉATOIRES X_n

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Donner l'ensemble des valeurs prises par X_n , en justifiant.
3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4))$$

(b) Vérifier que la relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$

(c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

(d) En déduire le terme général de la suite $(\mathbb{P}(X_n = 1))$

4. Adapter les questions précédentes pour déterminer une expression explicite de $\mathbb{P}(X_n = 2)$

On admet que $\mathbb{P}(X_n = 3) = \mathbb{P}(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

5. Déterminer pour tout entier n l'espérance de la variable aléatoire X_n

CALCUL DES PUISSANCES D'UNE MATRICE

A. Avec la partie précédente

On pose pour tout entier n la matrice $U \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ définie par :

$$U_n = (\mathbb{P}(X_n = 1) \quad \mathbb{P}(X_n = 2) \quad \mathbb{P}(X_n = 3) \quad \mathbb{P}(X_n = 4))$$

On pose $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n A$
2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n$$

3. En déduire la première ligne de A^n

B. Une méthode indépendante de calcul de A^n

On considère $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer deux réels a, b tels que $A = aI_4 + bJ$
2. Montrer que pour tout $k \neq 0$, $J^k = 4^{k-1}J$
3. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer une expression de A^n en fonction de I et J
4. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$