XXV. SEMAINE 25 : 18-22 MAI

Contenus :

1. **Calcul :** bien connaître les dérivées des fonctions usuelles et savoir dériver des produits / quotients / composées de fonctions **rapidement et sans erreur**.
2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^p, \mathscr{C}^\infty$. Dérivée p-ième d'une fonction. Formule de Leibniz.
3. Formules de Taylor : Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, théorème de Taylor Young.
4. Développements limités usuels : $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}, \ln(1+x), \ln(1-x), e^x, \sin(x), \cos(x), (1+x)^\alpha$ en 0 et $\tan(x)$ à l'ordre 1. *On a vu en exercice le développement limité de* $\tan$ *jusqu'à l'ordre* 5
5. Calcul de développements limités par somme et produit. *La composition de développements limités est hors programme, sauf par un polynôme type* $\sin(x^2)$ *ou* $\ln(1+2x)$ *et on a vu en exercice* $\frac{1}{\cos(x)}$
6. Application du développement limité à l'étude d'une courbe : prolongement par continuité, équation de la tangente au point de prolongement, position d'une courbe par rapport à sa tangente localement.
7. Minimum, maximum local. Point critique. Cas des développements limités de la forme $f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$
8. **Convexité.** Définition pour une fonction quelconque et caractérisations pour des fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$.
9. Inégalités de convexité (comparaison avec tangente en un point ou corde entre deux points).
10. Toute fonction convexe admettant un point critique admet un mimimum global en ce point.

Questions de cours :

1. Démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral par récurrence avec une intégration par parties.
2. Démonstration de la convergence de la série exponentielle avec pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
3. Énoncé de la formule de Taylor-Young et application au développement limité de la fonction exponentielle en 0.
4. Définition de fonction convexe / concave sur I. En étudiant la fonction $\ln \circ \ln$, montrer : $\forall (a,b) \in [1;+\infty[^2, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$
5. En utilisant la convexité, montrer : $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$