Chapitre 23 : Espace probabilisé, le retour

Proba 3

Contexte : on refait tout le chapitre 12, sans supposer que l'univers est un ensemble fini. Il y a donc quelques généralisations à écrire, et quelques subtilités à prendre en compte. Mais pas d'inquiétude : on ne calculera (pour le moment) qu'avec des *petits infinis.* **Bien revoir toutes les probas en univers fini !**

I. Cadre : espace probabilisé

1. Univers

Définition 1 (Rappel)**.** On appelle **issue** tout résultat possible d'une expérience aléatoire, et **univers** des issues l'ensemble Ω des issues. Dans la suite, sauf précision contraire, Ω désigne l'univers.

Exemple (Des exemples d'univers qui ne sont pas finis)**.**
- Des univers «continus» : temps d'attente d'un bus, temps de vie d'un atome radioactif, température, vitesse d'une voiture …
- Des univers «discrets» : nombre de voitures qui passent sur une route en une heure, nombre de pile ou face avant d'avoir le premier pile …

2. Événements

Définition 2 (Intersection, union d'une famille potentiellement infinie d'ensembles)**.** Si I est un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω, on définit :

- $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in \Omega | \forall i \in I, x \in A_i\}$
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in \Omega | \exists i \in I, x \in A_i\}$

Exemples. On lance une infinité de pièces à pile ou face, et on note P_i l'événement « le i-ème lancer donne pile». Écrire sous la forme d'unions, d'intersections, de complémentaires les événements suivants :

1. «Le 3-ème lancer donne face»
2. «Les 10 premiers lancers donnent pile»
3. Aucun des 10 premiers lancers ne donne pile
4. Aucun lancer ne donne pile
5. Au moins un lancer donne pile
6. Au moins un lancer donne pile, après le 1000 ème lancer
7. Tous les lancers Face ont lieu avant le 1000 ème lancer
8. Trois lancers successifs donnent face
9. Une infinité de lancers donnent pile

Définition 3 (Ensemble des événements)**.** On appelle **ensemble des événements**, un ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :
- $\Omega \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est **stable par** passage au complémentaire : $\forall A \in \mathscr{A}, \overline{A} \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est **stable par** union dénombrable : pour toute partie I de $\mathbb{N}$, finie ou infinie, et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements :
$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$$
- $\mathscr{A}$ est **stable par** intersection dénombrable : pour toute partie I de $\mathbb{N}$, finie ou infinie, et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements :
$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$$

Dans cette définition, *dénombrable* veut dire : *partie de* $\mathbb{N}$ *finie ou infinie*

Exemples.
- $\mathscr{P}(\Omega)$, comme au chap. 12
- $\{\varnothing, \Omega\}$
- $\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$ où $A \in \mathscr{P}(\Omega)$

On remarque aisément dans tous ces cas : $\varnothing \in \mathscr{A}$

Remarque. Dans une expérience qui a beaucoup d'issues possibles, il n'est pas possible de *tout* mesurer, observer. Exemple du radar. On liste donc comme «événements» ce qu'on est en mesure d'observer dans l'expérience. Mathématiquement, l'obstacle serait de construire sur $\mathscr{P}(\Omega)$ une fonction de probabilité qui vérifie les propriétés attendues.

Exemple. Règles d'un jeu de dé à 6 faces : si on fait un 5 ou un 6, on gagne, sinon on perd. Le seul événement qui nous intéresse est $\{5;6\}$. On peut donc munir l'ensemble $\Omega = [|1;6|]$ de l'ensemble d'événements :
....

♠ *Remarque.* On dit que $\mathscr{A}$ avec les propriétés précédentes est une **tribu**, mais ce mot n'est plus au programme : c'est une forme de structure algébrique (ensemble muni de quelques opérations, comme les espaces vectoriels)

Propriété 4 (Admis)**.** Rappel et généralisation de propriétés ensemblistes. Posons $(A_k)_{k\in I}$ et B des événements, alors

- Règles de de Morgan : $\overline{\bigcup_{k\in I} A_k} = \bigcap_{k\in I} \overline{A_k}$ et $\overline{\bigcap_{k\in I} A_k} = \bigcup_{k\in I} \overline{A_k}$
- Distributivité de $\cap$ et $\cup$: $B\cap\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \bigcup_{k\in I}(B\cap A_k)$ et $B\cup\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \bigcap_{k\in I}(B\cup A_k)$

Remarque. D'après les règles de de Morgan, si un ensemble est stable par complémentaire et union, il l'est pas intersection - nous n'avions pas besoin de préciser les **deux** propriétés, puisque l'une implique l'autre.

Définition 5. On dit que $(\Omega,\mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**. On va maintenant le probabiliser …

3. Probabilité

♡ **Définition 6.** On appelle **probabilité** sur Ω muni d'un ensemble d'événements $\mathscr{A}$ toute fonction $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0;1]$ vérifiant :

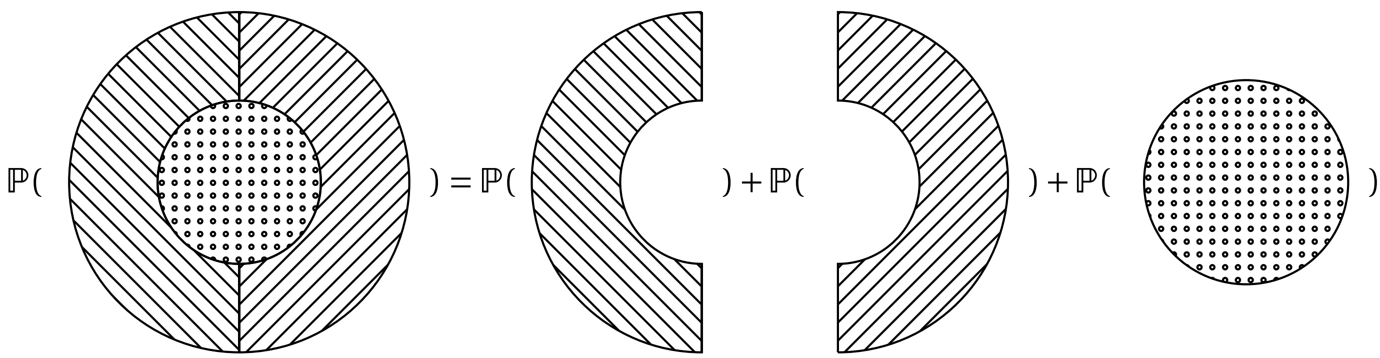
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\sigma-$additivité : pour toute partie I de $\mathbb{N}$ finie ou inifinie et pour toute famille $(A_i) \in \mathscr{A}^I$:
$$(\forall i,j \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \varnothing) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque. Sur le fait que ces éléments sont bien définis.
Dans le chapitre 12, on se contentait de l'additivité pour 2 événements, et pour les unions finies on le montrait par récurrence. Mais la récurrence ne permet pas de montrer la propriété pour une famille infinie !

Exemple.

- On définit une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout entier n, $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{en!}$ et pour tout $A \in \mathscr{A}$: $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in A} \mathbb{P}(\{n\})$
- On peut définir ainsi une proba sur $\mathbb{N}$ à partir de toute série convergente
- Peut-on tirer un entier au hasard de façon uniforme ?

Illustration :



On appelle **espace probabilisé** l'espace $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. On garde cette notation pour tout ce qui suit.

Remarque. Les fonctions de probabilité de ce chapitre conservent les mêmes propriétés qu'au chapitre 12, et on ne les démontrera pas de nouveau (probabilité du complémentaire, de l'union, croissance pour l'inclusion, etc.)

♡ **Définition 7.** Soit $A \in \mathscr{A}$ un événement. On dit que A est **presque sûr** (ou quasi-certain) si $\mathbb{P}(A) = 1$ et que A est **négligeable** (ou quasi-impossible) si $\mathbb{P}(A) = 0$.
Un prédicat $\mathscr{P}(\omega)$ sur Ω est dit **presque sûr** si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \mathscr{P}(\omega)\}) = 1$

Exemple. Un événement presque sûr n'est pas toujours Ω, et un événement quasi-impossible n'est pas toujours $\varnothing$! Un exemple : lancer d'une infinité de pièces à pile ou face (c'est long). Comment démontrer que l'événement «une infinité de pile» est négligeable ?

II. Théorème de la limite monotone : version proba

1. Le théorème

Le théorème suivant est aussi appelé théorème de **continuité croissante de** $\mathbb{P}$.

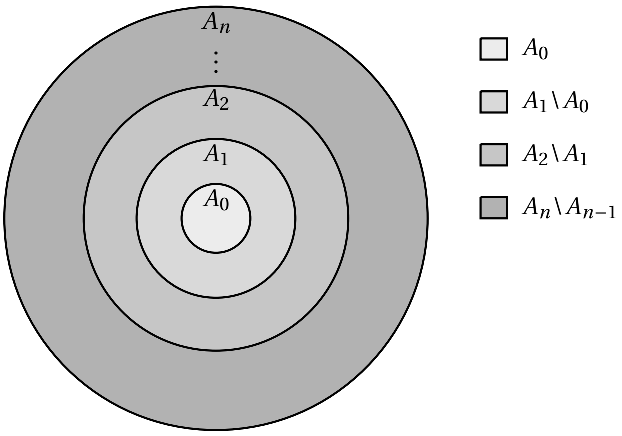
♡ **Théorème 8.** Soit (A_n) une suite d'événements **croissante pour l'inclusion** c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Si (A_n) est une suite **décroissante pour l'inclusion**, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Illustration :



Démonstration. En posant $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$

Exemple (Pile ou face infini)**.** (avec le modèle habituel) La probabilité d'obtenir une infinité de Pile est 0

Exercice. On considère une urne qui contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule aléatoirement jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on double le nombre de boules blanches pour le tirage suivant. On note B_n : «les n premiers tirages ne donnent que des boules blanches» et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$. On note B : «l'expérience ne s'arrête jamais»

1. Justifier que (b_n) converge et $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$
2. Exprimer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis relier $\mathbb{P}(B)$ à la somme d'une série convergente. L'événement B est-il quasi impossible ?

2. Conséquence

Propriété 9. En omettant l'hypothèse de suite croissante, ou décroissante, on conserve :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad ; \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Le nom de **continuité croissante** prend alors son sens.

♣ *Démonstration.* En appliquant la propriété précédente à $B_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$ ou $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$

III. Généralisations des formules en univers fini

1. Formule des probabilités totales

Définition 10 (Rappel et généralisation : système complet d'événements)**.** On appelle système complet d'événements toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ telle que

- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$
- $\forall i \neq j \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \varnothing$

On s'intéressera à des systèmes complets **d'événements non négligeables**, i.e. : pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) \neq 0$

Remarque. En quoi est-ce une généralisation de la définition déjà connue ?

Propriété 11. On a alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$

Propriété 12 (Probabilités totales)**.** Si (A_n) est un **système complet d'événements non négligeables**, alors pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

Démonstration.

Remarque. La formule des probabilités totales avec un système complet d'événements *fini* reste valable. Attention : pour une infinité d'événements, un *arbre* ne peut pas être exhaustif - savoir écrire cette formule, en la citant et en précisant le s.c.e. en jeu.

Exercice. Trois joueurs ou joueuses A, B, C jouent aux dés en lançant successivement le dé : le premier à obtenir un 6 gagne la partie. Les lancers de dés sont supposés mutuellement indépendants *(voir section suivante si besoin)*. Calculer la probabilité que chaque joueur gagne la partie.

Exercice. On tire au hasard un nombre entier (dans $\mathbb{N}^*$) au hasard en supposant que la probabilité de tirer n est $\frac{1}{2^n}$. On tire ensuite n pièces (équilibrées) à pile ou face, et on compte le nombre de pile. Exprimer sous la forme d'une somme la probabilité d'obtenir k pile.

2. Indépendance mutuelle

Révisions nécessaires : notion d'événements indépendants 2 à 2 et mutuellement (indépendants dans leur ensemble). On généralise ici cette notion à une infinité d'événements.

Définition 13. Soit I une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Les (A_i) sont mutuellement indépendants si **pour tout** $k \in \mathbb{N}$ et pour tous $i_1, \ldots, i_k$ distincts, alors :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

c'est-à-dire : pour toute **partie finie J de** I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Propriété 14. Les $\overline{A_i}$ sont également mutuellement indépendants ! Et les familles obtenues en passant une sous-partie de la famille au complémentaire.

Remarque. L'indépendance 2 à 2 est moins forte que l'indépendance mutuelle : la définition veut dire qu'on vérifie l'indépendance 2 à 2 **mais aussi** 3 à 3, 4 à 4, etc.

Remarque. **Savoir** que des événements sont indépendants (parce que c'est dit dans l'énoncé par exemple) permet d'utiliser cette formule, très simplifiée par rapport à la formule des probabilités composées !