Feuille d'exercices n°23

Calculs de probabilités

♢ **Exercice 1** (Lancers de pièces). On lance indéfiniment une pièce équilibrée (lancers indépendants). On notera P (resp. F) pour Pile (resp. Face)

1. (a) Calculer la probabilité d'obtenir alternativement des P et des F (en commençant par P) lors des n premiers lancers.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir indéfiniment alternativement des P et des F (en commençant par P)
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité d'obtenir la séquence P-F pour la première fois aux lancers $n-1$ et n
   (b) Calculer la probabilité que la séquence P-F apparaisse au moins une fois.

♡ **Exercice 2** (Inégalité de Boole ou «sous-additivité» de $\mathbb{P}$). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements définis sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

2. En déduire que si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

♢ **Exercice 3** (Rumeur). Soit $p \in]0;1[$. Une rumeur se propage de la façon suivante : un premier individu à connaissance d'une information I, il la tramsmet fidèlement avec probabilité p ou la transforme en son contraire avec la probabilité $1-p$. Le deuxième individu procède de la même manière et ainsi de suite. On note P_n l'événement «le n-ième individu a reçu l'information I» et $p_n = \mathbb{P}(P_n)$.

1. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} en fonction de p_n
2. En déduire l'expression de p_n puis $\lim p_n$

Probabilité conditionnelle, indépendance en proba

♢ **Exercice 4** (Un entier au hasard). On se place sur $\mathbb{N}^*$ et on définit une probabilité en définissant pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$. On définit pour tout entier k l'événement A_k : «le nombre tiré est un multiple de k»

1. Montrer que $\mathbb{P}$ est bien définie
2. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la probabilité de l'événement A_k
3. Calculer les probabilités de $A_2 \cap A_3$ et de $A_2 \cup A_3$
4. A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

♢ **Exercice 5.** Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = \mathbb{P}(A_i)$. Donner une expression simple de $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \ldots, p_n$.

TD :le lemme de Borel-Cantelli

♠ **Théorème (HP) :** On se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on pose (A_n) une suite d'événements vérifiant : $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors, presque sûrement, un nombre fini seulement des A_n se réalise.

Exercice 6 (Démonstration - inspiré de Maths II ECE 2021)**.**

1. **Étape 1** : modéliser «une infinité d'événements se réalise».
   (a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Interpréter l'événement $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$
   (b) Justifier que pour $\omega \in \Omega$, il y a équivalence entre «ω appartient à une infinité des A_k» et :
   $$\omega \in A := \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$$
2. **Étape 2** : continuité décroissante
   (a) Avec les notations précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, B_{n+1} \subset B_n$
   (b) En déduire :
   $$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$$
3. En utilisant le résultat de l'exercice 2, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$

Ainsi, la probabilité qu'une infinité des A_k se réalise est nulle : avec une probabilité 1, un nombre fini seulement des A_k a lieu.

Exercice 7 (Pour aller plus loin : le deuxième lemme de Borel-Cantelli)**.**

Si de plus les A_n sont mutuellement indépendants, alors si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, un nombre infini de A_n se réalise presque sûrement.

Avec les notations de l'exercice 6, ce théorème dit que sous ces conditions, $\mathbb{P}(A) = 1$.

1. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}$. Interpréter C_n.
2. Montrer que notre résultat est équivalent à :
   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n\right) = 0$$
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$, puis $N \geqslant n$. Montrer :
   $$\lim_{N \to +\infty} \ln\left(\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k})\right) = -\infty$$
4. En déduire $\mathbb{P}(C_n) = 0$
5. En constatant que (C_n) est une suite croissante, montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

On a ainsi montré que la probabilité de A était égale à 0 ou à 1, selon les cas - il n'y a pas d'entre-deux. Si ce résultat paraît étonnant, il y a en fait plusieurs résultats en probabilités sous cette forme, qui portent le nom de loi du 0-1