Devoir Maison n°16 - Commutant d'une matrice carrée

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

— $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | AM = MA\}$ le **commutant** de A, i.e. l'ensemble des matrices qui commutent avec A

— $\mathbb{R}[A] = \{P(A) | P \in \mathbb{R}[x]\}$ l'ensemble des **polynômes en** A (qui sont des matrices)

— $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

— $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ et $\mathcal{C}(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lequel des deux est inclus dans l'autre ?

   - La matrice nulle est bien dans $\mathbb{R}[A]$ puisqu'il s'agit de $P(A)$, avec P le polynôme nul.
   - Si M, N sont dans $\mathbb{R}[A]$, il existe des polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[x]$ tels que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$. Soient λ, μ des réels. Alors :
   $$\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = (\lambda P + \mu Q)(A) \in \mathbb{R}[A]$$
   - Ainsi, $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   - La matrice nulle est bien dans $C(A)$ car $0 \times A = 0 = A \times 0$
   - Soient M, N des matrices de $C(A)$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$. Alors
   $$\begin{aligned}(\lambda M + \mu N)A &= \lambda MA + \mu NA \text{ par distributivité}\\ &= \lambda AM + \mu AN \text{ car } M, N \in C(A)\\ &= A(\lambda M + \mu N) \text{ par distributivité}\end{aligned}$$
   Ainsi, $\lambda M + \mu N \in C(A)$
   - Ainsi, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

   Finalement, pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $P(A) = a_0 I_3 + a_1 A + \ldots + a_n A^n$ qui commute avec A. On en déduit donc : $\mathbb{R}[A] \subset C(A)$. On regardera dans les questions suivantes si, sur certains exemples, cette inclusion est une égalité.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer $\mathcal{C}(A)$ et en donner la dimension.

   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Cherchons à quelles conditions sur $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ on a $AM = MA$:

$$\begin{aligned}
AM = MA &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & c \\ d & d+e & f \\ g & g+h & i \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} a+d = a \\ b+e = a+b \\ c+f = c \\ d = d \\ e = d+e \\ f = f \\ g = g \\ g+h = h \\ i = i \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} d = 0 \\ a = e \\ f = 0 \\ g = 0 \end{cases}\\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & h & i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \middle| (a,b,c,h,i) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

$C(A)$ est de dimension 5

(b) Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré 2.
On cherche une expression de A^2 en fonction de A et I_3. Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A - I_3$$

Ainsi, le polynôme $x^2 - 2x + 1$ annule A

(c) A-t-on $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A]$?
On sait déjà que $\mathbb{R}[A] \subset \mathcal{C}(A)$. Regardons les dimensions de ces deux espaces. Pour tout polynôme P, d'après le théorème de division euclidienne, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ et des réels a, b tels que : $P(x) = (x^2 - 2x + 1)Q(x) + ax + b$.
Ainsi :

$$P(A) = (A^2 - 2A + I_3)Q(A) + aA + bI_3 = aA + bI_3$$

On en déduit que $\mathbb{R}[A]$ est de dimension 2 (car A, I est une base de $\mathbb{R}[A]$). Puisque $C(A)$ est de dimension 5, $\mathbb{R}[A] \neq C(A)$.

3. Soient $d_1, \ldots, d_n$ des réels **distincts** et $A = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ la matrice diagonale qui a $d_1, \ldots, d_n$ sur sa diagonale.

(a) Déterminer $\mathcal{C}(A)$ et en donner la dimension.
L'équation $AM = MA$ admet pour solution l'ensemble des matrices diagonales (vérifier par le calcul). Ainsi, $\dim(C(A)) = n$

(b) Montrer que la famille $(I_n, \ldots, A^{n-1})$ est libre.
Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0$. Puisque les puissances de matrices diagonales se calculent terme par terme, on a pour chacun des d_i ($i \in [|1; n|]$) : $\lambda_0 + \lambda_1 d_i + \ldots + \lambda_{n-1} d_i^{n-1} = 0$. Ainsi, le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1}$ admet n racines distinctes $d_1, \ldots, d_n$. Puisque $\deg(P) \leq n - 1$, alors d'après un résultat du cours, P est le polynôme nul, i.e. $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$
Ainsi, $(I_n, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre.

(c) A-t-on $C(A) = \mathbb{R}[A]$? D'après la question précédente, $\dim(\mathbb{R}[A]) \geq n$. Comme par ailleurs, $\mathbb{R}[A] \subset C(A)$ qui est de dimension n, alors $\dim(\mathbb{R}[A]) = \dim(C(A)) = n$ et avec l'inclusion on obtient $\mathbb{R}[A] = C(A)$

4. On pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en supposant que $\dim(\mathcal{C}(A)) = 3$

(a) Montrer que $\mathcal{C}(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{21}) \neq \{0\}$ par un argument de dimension.
D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(C(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{21}) = \dim(C(A)) + \dim(\mathrm{Vect}(E_{11}, E_{21})) - \dim(C(A) + \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{21})) = 5 - \dim(C(A) + \mathrm{Vect}(E_{11},$$

Puisque nous sommes en dimension 4, $\dim(C(A) + \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{21})) \leq 4$ et donc $\dim(C(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{21}) \geq 1$, c'est-à-dire que cet ensemble n'est pas réduit à 0.

(b) En déduire $c = 0$
Soit $M = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. $AM = MA$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} ae + cg & af + ch \\ be + dg & bf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bf & ce + df \\ ag + bh & cg + dh \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} cg & = & bf \\ af + ch & = & ce + df \\ be + dg & = & ag + bh \end{cases}$$

Supposons $M \in \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{21})$, i.e. $f = h = 0$. Le système devient alors :

$$\begin{cases} cg & = & 0 \\ ce & = & 0 \\ be + dg & = & ag \end{cases}$$

En supposant **par l'absurde** $c \neq 0$, on obtient alors : $g = 0$, $e = 0$ et donc $M = 0$. Or, on sait qu'il existe au moins une matrice non nulle vérifiant ces contraintes. Ainsi, $c = 0$

(c) On montre de même que $\mathcal{C}(A) \cap \text{Vect}(E_{12}, E_{22}) \neq \{0\}$. En déduire une contradiction.
Reprenons notre système précédent avec cette fois $M \in \text{Vect}(E_{12}, E_{22}$, i.e. $e = g = 0$. Les équations deviennent :

$$\begin{cases} bf & = & 0 \\ af + ch & = & df \\ bh & = & 0 \end{cases}$$

Si par l'absurde $b \neq 0$, alors $f = h = 0$, et dans ce cas $M = 0$, ce qui est une contradiction de la même manière. Ainsi, $b = 0$.
Or, si $b = c = 0$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et donc A est une matrice diagonale. Or, on a montré dans la question 3 que pour une matrice diagonale avec $a \neq d$, la dimension de $C(A)$ est 2 et pas 3. Il y a une contradiction avec $\dim(C(A)) = 3$. Si en revanche $a = d$, $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension $4 \neq 3$ et il y a également une contradiction.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$

(a) Justifier l'existence d'un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X \neq 0$
C'est la contraposée d'une propriété déjà vue plusieurs fois : si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, $A^{n-1}X = 0$, alors $A^{n-1} = 0$.

(b) Montrer que la famille $(X, AX, \dots, A^{n-1}X)$ est une base de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$
Puisque cette famille est composée de n vecteurs (la dimension de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$), il suffit de vérifier qu'elle est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que :

$$\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \dots + \lambda_{n-1}A^{n-1}X = 0$$

Multiplions cette égalité par A^{n-1} :

$$\lambda_0 A^{n-1}X + \dots + \lambda_{n-1}A^{2n-2}X = A^{n-1}0 = 0$$

Or puisque $A^n = 0$, il en va de même pour $A^{n+1}, \dots, A^{2n-2}$. Ainsi on obtient : $\lambda_0 A^{n-1}X = 0$, et puisque $A^{n-1}X = 0$, alors $\boxed{\lambda_0 = 0}$.
Ainsi : $\lambda_1 AX + \dots + \lambda_{n-1}A^{n-1}X = 0$ et on recommence en multipliant par A^{n-2} pour obtenir $\lambda_1 = 0$, puis par A^{n-3} pour obtenir $\lambda_2 = 0$, etc. Finalement : $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ et la famille est libre, donc une base de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$

(c) Soit $M \in \mathcal{C}(A)$. Il existe des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $MX = a_0X + a_1AX + \dots + a_{n-1}A^{n-1}X$. Montrer que $M = a_0I_n + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1}$
Soit Y un vecteur quelconque de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$. Montrons que $MY = a_0Y + \dots + a_{n-1}A^{n-1}Y$. Puisque $(X, \dots, A^{n-1}X)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe des réels $y_0, \dots, y_{n-1}$ tels que $Y = y_0X + \dots + y_{n-1}A^{n-1}X$. On en déduit :

$$\begin{aligned} MY &= M\sum_{k=0}^{n-1} y_k A^k X \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} y_k A^k MX \text{ par linéarité et parce que } A, M \text{ commutent} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} y_k A^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i X\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \sum_{k=0}^{n-1} y_k A^k X \text{ car } A^i, A^k \text{ commutent} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i Y \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur Y, alors $M = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$

(d) Qu'en déduire sur $\mathcal{C}(A)$ et $\mathbb{R}[A]$?
Dans la question précédente, on a montré $\mathcal{C}(A) \subset \mathbb{R}[A]$. L'autre inclusion étant toujours vraie : $\boxed{\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A]}$

6. Soit $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que l'ensemble $F(T) = \{MT - TM | M \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{2}$

- $0 \in F(T)$ car $0 = 0 \times T - T \times 0$ (et la matrice nulle est triangulaire supérieure)

- Soient $A_1, A_2 \in F(T)$ et λ_1, λ_2 des réels. Par définition, il existe des matrices M_1, M_2 triangulaires supérieures telles que $A_1 = M_1T - TM_1$, $A_2 = M_2T - TM_2$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 &= \lambda_1(M_1T - TM_1) + \lambda_2(M_2T - TM_2)\\ &= (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)T - T(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)\end{aligned}$$

Or, si M_1, M_2 sont triangulaires supérieures, alors $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ l'est aussi; donc $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 M_2 \in F(T)$. Par ailleurs, si M et T sont triangulaires supérieures, MT et TM le sont (propriété du cours sur les matrices!) donc $MT - TM$ l'est aussi. Regardons les coefficients diagonaux de $MT - TM$: si $i \in [|1; n|]$:

$$\begin{aligned}(MT - TM)_{ii} &= (MT)_{ii} - (TM)_{ii}\\ &= \sum_{k=1}^{n} M_{ik}T_{ki} - \sum_{k=1}^{n} T_{ik}M_{ki}\\ &= M_{ii}T_{ii} - T_{ii}M_{ii} \text{ car si } k > i, T_{ki} = M_{ki} = 0 \text{ et si } k < i, T_{ik} = M_{ik} = 0\\ &= 0\end{aligned}$$

On peut donc dire que les matrices de $F(T)$ sont triangulaires supérieures **strictes** et l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes étant de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, on en déduit :

$$\dim(F(T)) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

(b) On peut donc se donner une base $(M_iT - TM_i)_{1\leq i\leq r}$ de $F(T)$. On pose $G(T) = \text{Vect}(M_1, \dots, M_r)$. Calculer la dimension de $G(T)$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels vérifiant $\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_r M_r = 0$. Alors : $\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k M_k\right) T = 0 \times T = 0$. De même $T\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k M_k\right) = T \times 0 = 0$. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k(M_kT - TM_k) = 0$$

La famille des $(M_kT - TM_k)$ étant libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. On en déduit $\dim(G(T)) = r = \dim(F(T))$

(c) Montrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{C}(T) \cap \mathcal{T}_n(\mathbb{R})) \oplus G(T)$

- Montrons d'abord que ces deux ensembles sont en somme directe. Soit $M \in \mathcal{C}(T) \cap T_n(\mathbb{R}) \cap G(T)$. Alors, par définition, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $M = \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_r M_r$. Ainsi,

$$TM - MT = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k(TM_k - M_kT)$$

Puisque $M \in \mathcal{C}(T)$, $TM - MT = 0$, d'où : $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k(TM_k - M_kT) = 0$.

Puisque la famille des $(TM_k - M_kT)$ est libre, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ et donc $M = 0M_1 + \dots + 0M_r = 0$. Ainsi, $\mathcal{C}(T) \cap T_n(\mathbb{R}) \cap G(T) = \{0\}$.

- On considère φ l'endomorphisme de $T_n(\mathbb{R})$ défini par : $\varphi(M) = MT - TM$. Par définition, $F(T) = \text{Im}(\varphi)$. Par ailleurs, $C(T) \cap T_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\varphi)$. D'après la formule du rang,

$$\dim(T_n(\mathbb{R})) = \dim(C(T) \cap T_n(\mathbb{R})) + \dim(F(T)) = \dim(C(T) \cap T_n(\mathbb{R})) + \dim(G(T))$$

- Avec somme directe + égalité des dimensions, on a l'égalité d'ensembles demandée.

(d) En déduire : $\dim(\mathcal{C}(T)) \geq n$.

$\dim(C(T)) \geq \dim(C(T) \cap T_n(\mathbb{R}))$. Or, d'après la question précédente, $\dim(C(T) \cap T_n(\mathbb{R})) = \dim(T_n(\mathbb{R})) - \dim(G(T)) = \frac{n(n+1)}{2} - \dim(G(T)) \geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$