

Devoir Maison n°17 - Chaîne de Markov (EDHEC 2017 ECE)

Modèle : Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, 4. Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré, selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1
- Lorsque le mobile est sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sommets de façon équiprobable.

Pour tout entier n , on note X_n le numéro du sommet auquel se situe le mobile à l'instant n . Ainsi, $X_0 = 1$.

ÉTUDE DES VARIABLES ALÉATOIRES X_n

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.

$X_1(\Omega) = \{2; 3; 4\}$ et X_1 est uniforme. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \frac{1}{3}(2 + 3 + 4) \\ &= \frac{1}{3} \times 9 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 2$. Donner l'ensemble des valeurs prises par X_n , en justifiant.

On remarque que $X_2(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$ (on peut par exemple faire 1-2-1, 1-3-2, 1-2-3, 1-2-4, avec à chaque fois une probabilité de $\frac{1}{9}$). Or, on montre aisément que si $X_n(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$, alors $X_{n+1}(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$. Par récurrence immédiate, pour tout $n \geq 2$, $X_n(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$

3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4))$$

Soit $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 3)\mathbb{P}_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 4)\mathbb{P}_{X_n=4}(X_{n+1} = 1) \\ &= 0\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 4) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4)) \end{aligned}$$

(b) Vérifier que la relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$

(c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(X_n = 1, X_n = 2, X_n = 3, X_n = 4)$ est un système complet d'événements, alors $\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1)$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}(X_n = 1)) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

(d) En déduire le terme général de la suite $(\mathbb{P}(X_n = 1))$

D'après la question précédente, la suite $u_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ est arithmético-géométrique et suit la formule de récurrence : $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$. D'après le théorème du cours, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(u_0 - \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}\right) + \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

4. Adapter les questions précédentes pour déterminer une expression explicite de $\mathbb{P}(X_n = 2)$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4)) = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}(X_n = 2)) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{3}$. La suite $(\mathbb{P}(X_n = 2))$ est donc arithmético-géométrique et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(0 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On admet que $\mathbb{P}(X_n = 3) = \mathbb{P}(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

5. Déterminer pour tout entier n l'espérance de la variable aléatoire X_n

Par définition, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) + 3\mathbb{P}(X_n = 3) + 4\mathbb{P}(X_n = 4) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 1) + 9\mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 9 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

CALCUL DES PUISSANCES D'UNE MATRICE

A. Avec la partie précédente

On pose pour tout entier n la matrice $U \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ définie par :

$$U_n = (\mathbb{P}(X_n = 1) \quad \mathbb{P}(X_n = 2) \quad \mathbb{P}(X_n = 3) \quad \mathbb{P}(X_n = 4))$$

On pose $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n A$

Pareil que la question 3.a précédente

2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n$$

Par récurrence (à savoir faire impérativement)

3. En déduire la première ligne de A^n

On a déterminé précédemment les expressions de $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = 3)$, $\mathbb{P}(X_n = 4)$. Or, puisque $U_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, $U_0 A^n$ est la première ligne de A^n . Ainsi, cette première ligne est exactement :

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

B. Une méthode indépendante de calcul de A^n

On considère $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer deux réels a, b tels que $A = aI_4 + bJ$

$$A = \frac{1}{3}J - \frac{1}{3}I_4 \quad (a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{1}{3})$$

2. Montrer que pour tout $k \neq 0$, $J^k = 4^{k-1}J$

Par récurrence.

3. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer une expression de A^n en fonction de I et J
 Puisque I_4 et J commutent, alors pour tout n :

$$\begin{aligned}
 A^n &= \left(\frac{1}{3}(J - I_4)\right)^n \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (-I_4)^{n-k} \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I_4 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} J \right) \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I_4 + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} - (-1)^n \right) J \right) \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I_4 + \frac{1}{4} ((-1+4)^n - 1) J \right) \\
 &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n I_4 + \frac{1}{4} \left((-1)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) J
 \end{aligned}$$

4. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$
 Pour $n = 0$, on trouve $1I_4 + \frac{1}{4}(1 - 1)J = I_4 = A^0$. L'expression reste valable pour $n = 0$