

CHAPITRE 24 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Proba 4

Dans ce chapitre, on se place dans le cadre de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Réviser les chapitres 12, 13, 18, 23, ...

I. Premières propriétés

1. Définition

Définition 1 (Variables aléatoires réelles discrètes). Une variable aléatoire réelle **discrète** est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

- $X(\Omega) = \{u_i\}_{i \in I}$ où I est une partie finie ou infinie de \mathbb{N}
- pour tout $i \in I$, $X^{-1}(u_i)$ est un événement (c'est-à-dire : $X^{-1}(u_i) \in \mathcal{A}$). Il est noté $(X = u_i)$ dans les notations probabilistes.

Remarque. En indexant $X(\Omega)$ par $I \subset \mathbb{N}$, on exclut en particulier le cas $X(\Omega) = \mathbb{R}$, au programme de deuxième année.

Exemple. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On appelle X le rang d'apparition du premier Pile. Modéliser cette expérience.

Propriété 2. La famille d'événements $(X = x)$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \right) = 1$$

2. Loi

Définition 3 (Rappel). On appelle **loi de la variable aléatoire** X la donnée de l'ensemble image $X(\Omega)$ et, pour tout $x \in X(\Omega)$, de $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$

Exemple. Déterminer la loi de X de l'exemple précédent. On note P_k l'événement «le k -ième lancer donne Pile»

Propriété 4 (Admis). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le terme général d'une série convergente à termes positifs et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = u_n$

Remarque. Souvent, en exercices, on omettra donc toute la partie «espace probabilisé», dont on admet qu'il existe, pour se concentrer directement sur la loi des variables aléatoires en jeu.

3. Cas $Y = g(X)$

Propriété 5. Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors $g \circ X$ est une variable aléatoire discrète. On la note $g(X)$

Démonstration.

Exercice. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note Y une variable aléatoire qui vaut -1 si le premier Pile est atteint à un rang pair et 1 si le premier Pile est atteint à un rang impair. Déterminer la loi de Y .

II. Espérance, variance, premières propriétés

1. Espérance : existence

Définition 6. Soit X une variable aléatoire discrète. Si $X(\Omega)$ est infini, on note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ses éléments. Si $\sum x_k \mathbb{P}(X = x_k)$ converge **absolument**, alors on dit que X **admet une espérance**, et on note $E(X)$ cette espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Remarque. On admet que la façon de numérotter les éléments de $X(\Omega)$ n'intervient pas dans le résultat de ce calcul.

- Exemples.**
- Les espérances du chapitre 13 entrent dans ce cadre
 - Reprenons notre exemple X du premier lancer Pile. Déterminer l'espérance de X

Remarque (Un exemple de v.a. sans espérance). On définit une v.a. X sur \mathbb{N} vérifiant pour $n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}$. Vérifier que X est une variable aléatoire discrète qui n'a pas d'espérance. La valeur $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ est admise.

Propriété 7 (Existence par domination - admis). Si X et Y sont deux v.a.d. vérifiant presque sûrement $0 \leq |X| \leq Y$, et si Y admet une espérance, alors X admet une espérance. Dans ce cas, $|E(X)| \leq E(Y)$

2. Espérance : calcul

Propriété 8 (Linéaire + positive = croissante). Soient X, Y des v.a.d. admettant une espérance, et a, b des réels.

- Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$

Démonstration. Le deuxième point (linéarité) est admis.

Théorème 9 (Cas " $Y = g(X)$ " : théorème de transfert - admis). Si X est une variable aléatoire discrète et g une fonction définie sur $X(\Omega)$, et si $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$ converge absolument, alors la v.a.d. définie par $Y = g(X)$ admet une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

- ♣ **Propriété 10** (HP mais classique). Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* qui admet une espérance, alors

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Exercice (Démonstration - inspiré de ESSEC 2016 ECE). X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* .

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j - 1) - \mathbb{P}(X > j)$
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^p j\mathbb{P}(X = j) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) \right) - p\mathbb{P}(X > p)$$

3. On suppose que X admet une espérance μ . Montrer que $\sum_{j=p+1}^{+\infty} j\mathbb{P}(X = j) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$
4. En déduire que $p\mathbb{P}(X > p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ puis que la série de terme général $u_j = \mathbb{P}(X > j)$ converge avec $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j) = \mu$

3. Variance

Définition 11 (Variance et écart-type). Si X est une v.a.d. telle que X et X^2 aient une espérance, alors $(X - E(X))^2$ admet une espérance, et on appelle :

- $V(X) = E((X - E(X))^2)$ la **variance** de X
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ l'**écart-type** de X

On dit dans ce cas que X admet une variance.

Propriété 12. $V(X)$ est toujours un nombre positif, et si $V(X) = 0$ alors X est presque sûrement constante.

Remarque. Si X^2 admet une espérance, alors X aussi (petite preuve)

Propriété 13 (Koenig-Huygens). Si X admet une variance, alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

♣ *Démonstration.* La même qu'au chapitre 13!

Propriété 14 (Transformation affine et normalisation - rappel du chapitre 13). Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance, et soient a, b deux réels.

- $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée-réduite.

Démonstration.

III. Nouvelles lois usuelles

1. Loi de Poisson

Exercice (Autour de la loi des événements rares). Il apparaît en moyenne deux étoiles filantes toutes les 5 minutes au cours d'une nuit du mois d'août. On observe le ciel pendant 5 minutes, découpées en n intervalles de temps de même durée, supposés contenir **au plus** un passage d'étoile filante. On représente alors chacun de ces intervalles de temps comme une expérience de Bernoulli.

1. Quel paramètre p de l'expérience de Bernoulli faut-il choisir pour voir en moyenne 2 étoiles filantes au cours des 5 minutes ?
2. On appelle X_n le nombre d'étoiles filantes passées au cours des 5 minutes au complet. Déterminer pour tout entier k la probabilité de l'événement $[X = k]$
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{n!}{(n-k)!} \sim n^k$
4. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ quand $n \rightarrow +\infty$?

Définition 15. Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre λ** si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Propriété 16. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Démonstration.

Exercice (Applications du théorème de transfert). X suit une loi de Poisson, déterminer $E(e^X)$ et $E(\frac{1}{1+X})$

2. Loi géométrique

♡ *Exercice.* On lance une pièce truquée qui tombe sur Pile avec une probabilité 0,3 jusqu'à ce qu'on obtienne un Face.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir trois Pile lors des trois premiers lancers.
2. Déterminer la probabilité que le premier Face soit le quatrième lancer.
3. Écrire un programme Python qui simule cette expérience et affiche le rang d'apparition du premier Face.
4. Déterminer la loi du premier Face, noté X .



Définition 17. Soit $p \in]0;1[$ et $q := 1 - p$. On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre p** si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1} p$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

♣ *Exercice.* Vérifier que cette formule définit bien une loi de variable aléatoire discrète.

Remarque. La loi géométrique apparaît «naturellement» pour décrire le premier succès dans une itération d'expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre p .

Propriété 18. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance et

• $E(X) = \frac{1}{p}$

• $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Démonstration.



Théorème 19 (Caractérisation des lois sans mémoire (en exercice)). La loi géométrique est la seule loi qui vérifie pour tous entiers s, t la propriété : $\mathbb{P}_{(X>s)}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > t)$

Démonstration.

1. Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p , et s, t deux entiers. En remarquant que $(X > s + t) \cap (X > s) = (X > s + t)$, vérifier l'égalité annoncée.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire telle que **pour tous entiers** s, t , on ait :

$$\mathbb{P}_{(X>s)}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > t)$$

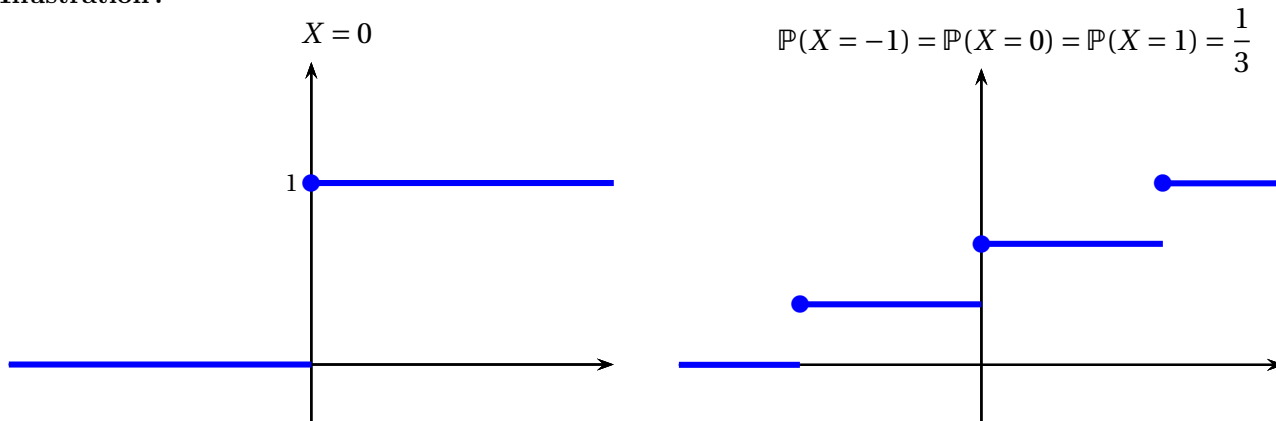
- (a) En posant $q = \mathbb{P}(X > 1)$, montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X > n) = q^n$
- (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = n)$

IV. Fonction de répartition

Définition 20. Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle **fonction de répartition** de la v.a. X la fonction :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

Illustration :



Exemple. Fonction de répartition d'une v.a. certaine et d'une v.a. de Bernoulli.

Exercice. Déterminer une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$

Exercice. Dessiner l'allure de la fonction de répartition de la loi définie par $\mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}$ puis de $Y := \frac{1}{X}$

Propriété 21. Soit X une variable aléatoire discrète. F_X a les propriétés suivantes :

- F_X est croissante
- F_X est continue à droite : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \mathbb{P}(X \leq x_0) = F_X(x_0)$
- F_X admet une limite à gauche en tout réel : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \mathbb{P}(X < x_0)$
- $F_X \xrightarrow{+\infty} 1$ et $F_X \xrightarrow{-\infty} 0$



Remarque. Il y a en fait une réciproque dans le monde des variables aléatoires (pas nécessairement discrètes) : toute fonction croissante continue à droite, qui admet une limite à gauche en chaque point, qui tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire (pas discrète)

Propriété 22. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x)$, c'est-à-dire que **la loi de X est entièrement caractérisée par F_X**

Remarque. Cet «encodage» de la loi permet une plongée des probabilités dans le monde de l'analyse (et donc d'utiliser les outils d'analyse!) Le fait de regarder $\mathbb{P}(X \leq k)$ plutôt que $\mathbb{P}(X = k)$ est très utile pour étudier le maximum de plusieurs v.a. Ça sera bien plus utile en 2A pour les variables aléatoires à densité.

V. Indépendance ?

1. Variables aléatoires indépendantes

Définition 23 (Variables aléatoires indépendantes). Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes. On dit que ces variables sont mutuellement indépendantes lorsque pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i = x_i)$ vérifient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque. Les v.a. indépendantes apparaissent naturellement dans le cadre d'expériences indépendantes : on dira par exemple «on tire 1000 pièces à pile ou face de manière indépendante».

♠ On admet qu'un univers permettant de modéliser cette expérience, avec des v.a. indépendantes existe.

Exemple. Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli **indépendantes** de même paramètre p , alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binômiale de paramètres (n, p)

Remarque. En pratique, on étudie souvent l'indépendance de deux variables aléatoires. La définition se reformule alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), \mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

2. Couples de variables aléatoires

Définition 24 (Loi conjointe, lois marginales). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

- La loi **conjointe** du couple est la loi de (X, Y) , c'est-à-dire la donnée pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de :

$$\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

- Les lois **marginales** du couple sont les lois de X et de Y , données pour tout $x_0 \in X(\Omega)$ et pour tout $y_0 \in Y(\Omega)$ par :

$$\mathbb{P}(X = x_0) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_0 \cap Y = y)$$

$$\mathbb{P}(Y = y_0) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \cap Y = y_0)$$

♡ *Remarque.* La formule pour les lois marginales découle de la formule des probabilités totales. On peut donc déduire les lois marginales de la loi conjointe, mais pas réciproquement !

Exemple. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 et a un réel tels que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \frac{a}{i!2^{i+j}}$$

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y
2. En déduire la valeur de a
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Théorème 25 (Théorème de transfert, version couple - ADMIS). Soient X, Y des v.a.r.d et f définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. $Z = f(X, Y)$ est une v.a.r.d.

Z admet une espérance si et seulement si la série suivante converge absolument, et alors :

$$E(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y) \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

Exercice (minimum, somme de X et Y). Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[[1; n]]$. Déterminer la loi de $W = \min(X, Y)$, puis son espérance. Même question pour la somme de deux variables aléatoires suivant une loi géométrique de même paramètre p .

Exemple. Linéarité de l'espérance.

Propriété 26 (Corollaire). Sous réserve d'existence,

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$

3. Cas d'un couple avec X et Y indépendantes

Propriété 27. On a dit précédemment que la loi conjointe ne se déduisait pas des lois marginales.

Si X et Y sont deux v.a.r.d. indépendantes, alors pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$$

Démonstration. C'est seulement la définition de l'indépendance.

Propriété 28 (Espérance du produit). Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Théorème 29 (Stabilité des lois de Poisson). Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . On suppose que X et Y sont indépendantes.

Alors, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

♡ *Démonstration.* Savoir traduire $\mathbb{P}(X + Y = k)$

1. Soient X, Y deux v.a. **indépendantes** qui admettent une variance. Montrer : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Exercice. 2. Soient (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires mutuellement **indépendantes**. On admettra que sous ces hypothèses, $X_1 + \dots + X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes. Montrer :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$$

Théorème 30 (Stabilité des lois binômiales). Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois binômiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) . On suppose que X et Y sont indépendantes.

Alors, $X + Y$ suit une loi binômiale de paramètres $(n + m, p)$

Démonstration.

Remarque. Cette dernière propriété s'interprète bien lorsqu'on considère les lois binômiales comme des sommes de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

NOM	NOTATION	SUPPORT $X(\Omega)$	VALEUR DE $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	ESPÉRANCE	VARIANCE	
LOIS FINIES	Loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\{1, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	
	Loi uniforme sur $\{a, a+1, \dots, b\}$ $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\{a, \dots, b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0, 1[$	$\{0, 1\}$	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$	
	Loi binômiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0, 1[$	$\mathcal{G}(p)$	\mathbb{N}^*	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0, +\infty[$	$\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	
LOIS INFINIES						