Feuille d'exercices n°24

Quand rien n'est précisé, on se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé quelconque.

Lois usuelles

♢ **Exercice 1.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n-1)$$

Déterminer entièrement la loi de X.

Exercice 2. Soit X une v.a.r.d suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$ (par exemple : nombre de lancers d'un dé avant de tirer un 6). Déterminer le plus petit entier m tel que $\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$.
Interprétation : m est une approximation de la médiane de X

♢ **Exercice 3.** Soit X une v.a.r.d. suivant une loi géométrique de paramètre p. Sachant que X est un entier pair, quelle est la probabilité d'avoir $X = 2$?

Exercice 4. Soit $\lambda > 0$. Déterminer le maximum de la suite définie par $u_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, quelle est la valeur de X la plus probable ?

♢ **Exercice 5.** Deux joueurs s'affrontent dans un jeu de dés. Chacun des deux, à son tour, lance le dé : lorsque l'un ou l'une obtient un 6, le jeu s'arrête et cette personne gagne. Déterminer la probabilité que chacun des joueurs gagne.

Exercice 6. Pour une femme ayant eu entre 18 et 20 ans en 1958, le nombre d'enfants suit une loi de Poisson. Un échantillon de 1000 individus de cette population comporte 135 femmes sans enfant. En déduire une estimation du paramètre de la loi de X. Estimer la proportion de la population étudiée ayant plus de 3 enfants.

Lois moins usuelles

Exercice 7. Soit a un réel et X une v.a. telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$

1. On pose $u_k = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}$. Montrer que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = u_k - u_{k+1}$
2. Déterminer la valeur de a

♢ **Exercice 8.** Un joueur joue à un jeu télévisé dont les questions sont de plus en plus difficiles. On suppose que la probabilité de succès à la n-ème question est $p_n = 1/n$. A chaque réponse juste, il double son capital et la question 1 rapporte 1. Le jeu s'arrête au premier échec.
On note S_k l'événement «le joueur a réussi la question n° k», X la v.a.r.d. indiquant le numéro de la dernière question bien répondue et Y la v.a.r.d. correspondant au gain empoché par le joueur.

1. Exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction des S_k.
2. Déterminer la loi de X.
3. Montrer que X possède une espérance.
4. Que peut-on dire de Y ?

♠ **Exercice 9** (Loi binômiale négative)**.** On lance une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir Pile est égale à p. On suppose que les lancers sont indépendants les uns des autres. Soit $r \geqslant 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de faces obtenues avant le r-ième pile.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Étudier l'espérance et la variance de X

Idées : on pourra admettre que l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+r-1}{k}q^k = \frac{1}{(1-q)^r}$ se dérive terme à terme pour $q \in]0;1[$, ou introduire $X_1, \ldots, X_r$ les temps d'attente pour le 1er, 2ème, ..., r-ième Pile.

Théorème de transfert

Exercice 10. Soit X une v.a. donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$

1. Vérifier que l'énoncé définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Montrer que $Y = e^{-X}$ admet une espérance, puis la calculer.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-k} - e^{-k-1}$

1. Vérifier que l'énoncé définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Montrer que la variable aléatoire $Y = 2^X$ admet une espérance et la calculer.

Espérance et variance : propriétés générales

Exercice 12. Soit X une v.a.r.d. qui admet une espérance μ et une variance. Posons $f : a \mapsto E((X-a)^2)$ Montrer que f admet un minimum global en $a = \mu$.

Exercice 13 (Inégalité de Markov)**.** Soit X une v.a.r.d. **positive** qui admet une espérance. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$a\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant E(X)$$

Une chaîne de production modélise le nombre d'items produits en un jour par une variable aléatoire d'espérance 50. En appliquant la propriété précédente, que peut-on dire de la probabilité que la chaîne produise au moins 75 pièces le même jour ?

Couples de lois, indépendance deux à deux et mutuelle

Exercice 14. Décrire la loi de $\max(X, Y)$ où X, Y sont indépendantes et suivent des lois géométrique de même paramètre p

Exercice 15. Soient X, Y telles que (X, Y) soit uniforme sur $[|1; n|]^2$. Déterminer les lois marginales de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 16. On appelle **covariance** de X et Y la quantité $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

1. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $cov(X, Y) = 0$
2. Soit X uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = 1 - X^2$. Calculer la covariance de X et Y.
3. X et Y telles que définies à la question précédente sont-elles indépendantes ?

Exercice 17. Soient X et Y indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p

1. Décrire la loi de $X + Y$
2. Déterminer la probabilité des événements $(X = Y)$ et $(X < Y)$
3. On pose maintenant $Z = \min(X, Y)$. Montrer que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - (1-p)^2)$

♠ **Exercice 18** (Fonction génératrice)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[|0; n|]$. On définit G_X par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

1. Justifier que $E(X) = G'_X(1)$
2. Trouver une relation entre $V(X), G''_X(1)$ et $G'_X(1)$
3. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire binômiale.
4. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. Montrer : $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$
5. Montrer que si X et Y sont indépendantes et suivent des lois binômiales de paramètres (m, p) et (n, p), alors $X + Y$ suit une loi binômiale de paramètres $(m + n, p)$
6. On suppose maintenant que X est à valeurs dans N et on définit : $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$. Montrer que pour tout $t \in [-1; 1]$, $G_X(t)$ est bien définie.

On admet que dans ce cas, G_X est une fonction dérivable sur $]-1;1[$, et qu'on peut dériver terme à terme. Si ces deux termes sont bien définis, on a alors de nouveau $E(X) = G'_X(1)$. Ces résultats, hors programme en ECG, découlent de la théorie des séries entières. *On pourrait utiliser les résultats généralisés de la partie précédente pour montrer que la somme de deux v.a. de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson.*

Un problème

Exercice 19 (Ecricome 2012 ECT)**.** On considère deux urnes notées respectivement U et V. On suppose que :

— l'urne U contient deux boules noires et deux boules blanches ;

— l'urne V contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante (E) : on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne U. Si elles ont des couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne U. Puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne U soit vide.
   On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne U soit vide.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer que la variable $Z = X - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et déterminer leurs valeurs.
2. On réalise la même expérience, mais cette fois-ci dans l'urne V.
   On note Y le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne V soit vide.
   On désigne par B l'évènement : “au premier tirage dans l'urne V, les deux boules sont de même couleur”.
   (a) Calculer $P(B)$.
   (b) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (c) Calculer $P(Y = 3)$.
   (d) À l'aide du système complet d'évènements $(B, \overline{B})$, montrer que :
   $\forall n \geqslant 3, \quad P(Y = n+1) = \frac{1}{5}P(X = n) + \frac{4}{5}P(Y = n)$.
   (e) Montrer alors : $\forall n \geqslant 3, \quad P(Y = n) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$.
   (f) La variable Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

♠ **Exercice 20** (Formule du crible, secret Santa)**.** La classe d'ECG1 organise un «Secret Santa». Il y a n participant·es (pour simplifier). Chaque personne tire un papier au hasard. On modélisera cette expérience en choisissant comme univers Ω l'ensemble des permutations de $[|1;n|]$ (bijections de $[|1;n|]$ dans $[|1;n|]$, associant à chaque personne le papier tiré). On prendra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, puisqu'on est en univers fini.

1. Déterminer le cardinal de Ω
2. Pour tout $i \in [|1;n|]$, on note A_i l'événement «la i-ème personne repart avec son chapeau». Justifier : $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$
3. Plus généralement, si $k \in [|1;n|]$, et si $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, interpréter l'événement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ puis calculer sa probabilité.
4. En déduire la probabilité de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. On utilisera pour ce faire le résultat (admis) :
   $$\forall n \geqslant 2, \forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n, \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})\right)$$
   Cette formule est appelée formule du crible (de Poincaré). C'est la généralisation de nos formules pour $\mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$
5. Conclure en donnant la probabilité que «le Secret Santa se passe bien», c'est-à-dire que personne ne tire son propre nom.
6. Quand n est grand, donner une approximation de cette probabilité.
7. Vérifier que la formule du crible (admise) correspond à une formule connue pour $n = 2$ et $n = 3$