Feuille d'exercices n°22

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n}$.

1. Calculer la dérivée $n$ième de f
   On a montré en cours que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ a pour dérivée k-ième : $x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. Ainsi :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$
2. En utilisant $f(x) = x^n \times x^n$, calculer la dérivée $n$ième de f d'une deuxième manière
   On pose $g : x \mapsto x^n$. $f = g \times g$. D'après la formule de Leibniz :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} n! \binom{n}{k}^2 x^n$$
3. En déduire la valeur de :
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$
   D'après les deux questions précédentes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\sum_{k=0}^{n} n! \binom{n}{k}^2 x^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$
   En particulier pour $x \neq 0$ on obtient :
   $$n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$$
   En divisant par $n!$ (qui est non nul) :
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$$

Exercice 13. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 et étudier la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de ce point.

On utilise un développement limité :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(2\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \ln(2) + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \\
&= \ln(2) + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
&= \ln(2) + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de la tangente en 0 est : $y = \ln(2) + x$. $f(x) - (\ln(2) + x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3$. Les deux fonctions sont donc localement de même signe donc localement la courbe de f est au-dessus de sa tangente à gauche de 0 et en-dessous à droite de 0.

Exercice 14. Déterminer les asymptotes et la position par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction : $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$
Pour $x \geq 1$ et $x \leq -1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} \\
&= \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= |x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= |x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)+1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}\right) \\
&= 2|x|-\frac{|x|}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Pour $x \geq 1$ on obtient : $f(x)=2x-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Ainsi, $f(x)-2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$: la courbe de f admet une asymptote d'équation $y=2x$ et $f(x)-2x$ est du même signe que $-\frac{1}{4x^3}$ donc négative au voisinage de $+\infty$. Ainsi, la courbe de f s'approche de son asymptote par **en dessous**.
Pour $x \leq -1$, on obtient $f(x)=-2x+\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et la courbe de f admet une asymptote d'équation $y=-2x$ et s'en approche par en dessous.
On peut aussi traiter un seul cas puis le deuxième par parité de f.

Exercice 18 (Moyennes arithmétique et géométrique)**.** Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ des réels positifs. Montrer :

$$\sqrt[n]{x_1\times\ldots\times x_n}\leq\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$$

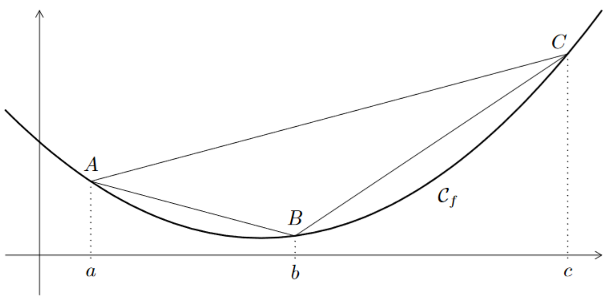
La fonction ln est concave. Pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$, on sait donc :

$$\ln\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\geq\frac{1}{n}\left((\ln(x_1)+\ldots+\ln(x_n)\right)=\ln\left((x_1\times\ldots\times x_n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Il suffit ensuite d'appliquer la fonction exponentielle, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, pour obtenir l'inégalité souhaitée.
Si les $(x_1,\ldots,x_n)$ sont positifs mais pas strictement : il suffit qu'un seul des x_i soit nul pour que le terme de gauche soit nul, et celui de droite est toujours positif donc l'inégalité reste vraie.

♠ **Exercice 19** (Inégalité des pentes)**.** Soient $a<b$ deux réels, $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction convexe *(sans hypothèse de dérivabilité)* et $c\in]a;b[$.

1. Faire un dessin de la situation. On pose $A(a,f(a)),B(b,f(b)),C(c,f(c))$: relier A et B, A et C, B et C. Que dire des pentes des segments ainsi tracés ?



On fait le dessin ci-dessus, en inversant les rôles de b et c (image trouvée sur internet, d'où la convention différente)

2. Montrer :
$$\forall c \in]a;b[, \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
Soit $c \in]a;b[$.
$c = \frac{c-b}{a-b}a + \left(1 - \frac{c-b}{a-b}\right) b$ donc par convexité de la fonction f :
$$f(c) \leq \frac{c-b}{a-b}f(a) + \left(1 - \frac{c-b}{a-b}\right) f(b)$$
Via des manipulations algébriques (développer, regrouper intelligemment...) on obtient les deux inégalités demandées.

3. D'après la question précédente, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante et bornée pour tout a dans le domaine de définition de f, donc admet en tout point une limite à gauche et à droite - en particulier elle est bornée ce qui implique que $f(x) - f(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

Exercice 20 (Une étude de suite implicite). 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in]0; +\infty[$
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ avec $f_n(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -1$ et $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Par théorème de la bijection, f_n est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]-1; +\infty[$ donc il existe un unique réel $u_n = f_n^{-1}(0)$ tel que $f_n(u_n) = 0$

2. En étudiant pour tout n le signe de $f_n(u_{n+1})$, montrer que la suite (u_n) est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1$ Par ailleurs, puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, $u_{n+1}^5 = 1-(n+1)u_{n+1}$. Ainsi :
$$f_n(u_{n+1}) = 1 - (n+1)u_{n+1} + nu_{n+1} - 1 = -u_{n+1} < 0 = f_n(u_n)$$
Par croissance stricte de f_n, on en déduit : $u_{n+1} < u_n$ et donc (u_n) est décroissante.

3. Montrer que (u_n) converge.
(u_n) est positive (question 1) donc minorée par 0 et décroissante : d'après le théorème de la limite monotone, il existe un réel $\ell \geq 0$ tel que $u_n \to \ell$

4. Par l'absurde, montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
Supposons par l'absurde $\ell > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 = 1 - nu_n$. Or, $u_n^5 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell^5$ et par ailleurs $nu_n \to +\infty$, ce qui crée une contradiction.

5. Déduire de la relation $u_n = \frac{1-u_n^5}{n}$:
$$u_n \sim \frac{1}{n}$$
Puisque $u_n \to 0$, $\frac{1-u_n^5}{n} \sim \frac{1}{n}$ et donc $u_n \sim \frac{1}{n}$

6. Montrer :
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$
On sait : $u_n = \frac{1-u_n^5}{n} = \frac{1-\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5}{n} = \frac{1-\frac{1}{n^5}(1+o(1))^5}{n} = \frac{1-\frac{1}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$

Exercice 21 (Ecricome 2007). 1. A l'aide de développements limités usuels, montrer qu'au voisinage de 0 :
$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

$$
\begin{aligned}
\ln(2-e^x) &= \ln(2-(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \\
&= \ln(1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \\
&= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^2) \\
&= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\
&= -x-x^2+o(x^2)
\end{aligned}
$$

Remarque : la composition de développements limités n'est plus au programme.

2. (a) Montrer que pour $k \geq 2 : 2-e^{\frac{1}{k}} \in]0;1[$

   Soit $k \geq 2$. $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$ et donc $2-e^{\frac{1}{k}} \leq 2-e^{\frac{1}{2}}$. Or, $e^{\frac{1}{2}} > 1$ par croissance de l'exponentielle, d'où $2-e^{\frac{1}{k}} < 1$. Par ailleurs, $2-e^{\frac{1}{k}} \geq 0 \iff e^{\frac{1}{k}} \leq 2 \iff e \leq 2^k$ ce qui est vrai pour $k \geq 2$ puisque $e \simeq 2.7$ et $2^2 = 4$

   (b) En déduire le signe de $\ln(2-e^{\frac{1}{k}}$

   Puisque ln est négatif sur $]0;1[$, pour tout $k \geq 2$, $\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right) < 0$

   (c) Pour $n \geq 2$, on pose :

$$
V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{\frac{1}{k}}) \text{ et } u_n = \exp(V_n)
$$

   Déterminer la limite de V_n et de u_n quand $n \to +\infty$

   D'après la question 1, $\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) \sim -\frac{1}{k}$, et la série de terme général $-\frac{1}{k}$ diverge (série harmonique) donc V_n diverge vers $-\infty$ (puisque les termes sont tous négatifs) et par composition avec l'exponentielle, $u_n \to 0$

3. (a) Montrer :

$$
\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\ln(nu_n) &= \ln(n) + \ln(u_n) \\
&= \ln(n) + V_n \\
&= \ln(n) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right) \text{ par télescopage} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{\frac{1}{k}}) - (\ln(k-1) - \ln(k)) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{\frac{1}{k}} - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}
$$

   (b) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$

   (c) En déduire un équivalent de u_n puis la nature de $\sum u_n$

Toujours d'après le développement limité de la question 1, $\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ d'où :

$$\begin{aligned}
\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&\sim -\frac{1}{2k^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un réel α tel que $\ln(nu_n) \to \alpha$ i.e. $nu_n \to e^\alpha$ par continuité de l'exponentielle, et donc $u_n \sim \frac{e^\alpha}{n}$. Par critère de Riemann, la série de terme général u_n diverge.

4. On pose : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k u_k$
   (a) Étudier le sens de variation de (u_n)
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $V_{n+1} - V_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n+1}}) < 0$ donc (V_n) est décroissante et par croissance de l'exponentielle, (u_n) est décroissante aussi.
   (b) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   On l'a déjà fait en DM et en DS, c'est le thème «séries alternées»
   Prenons $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_{2(n+1)} &= S_{2n+2} \\
&= S_{2n} + (-1)^{2n+1}u_{2n+1} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} \\
&= S_{2n} + (u_{2n+2} - u_{2n+1}) \\
&\leq S_{2n} \text{ puisque } u_{2n+2} \leq u_{2n+1}
\end{aligned}$$

   De même, $S_{2(n+1)+1} \geq S_{2n+1}$ donc (S_{2n}) est décroissante, (S_{2n+1}) est croissante et $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   (c) En déduire la nature de $\sum (-1)^n u_n$
   D'après la question précédente et le théorème des suites adjacentes, S_{2n} et S_{2n+1} ont la même limite S, donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ (c'est un résultat du chapitre 5) et donc la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

♠ **Exercice 22** (Formule de Stirling et le retour de Wallis ! Hors programme mais ultra classique !).

On cherche à montrer l'équivalent classique pour la factorielle :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

On pose pour tout entier naturel n : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$

1. Montrer en intégrant par parties que que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$
   On intègre par parties dans $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)dx$ en dérivant $\cos^{n+1}$ et en primitivant cos. Penser à : $\cos^2 + \sin^2 = 1$
2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $W_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$
   Par récurrence ! Calculer W_0 et penser que $W_{2(p+1)} = W_{2p+2}$ et pas W_{2p+1}. **Bien écrire au début de la récurrence à quelle quantité on veut arriver !**
3. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et en déduire : $W_{n+1} \sim W_n$ puis $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
   Premier point par croissance de l'intégrale. On a montré $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. Par décroissance, on obtient : $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ i.e. $\frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$. On divise par W_{n+1} et par théorème des gendarmes le quotient tend vers 1. Ensuite **astuce** : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. En multipliant à gauche et à droite par W_{n+1}, on obtient : $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$. On en déduit que

la suite (nW_nW_{n-1}) est constante égale à $1 \times W_1 \times W_0 = \frac{\pi}{2}$.
Puisque $W_{n+1} \sim W_n$, on déduit :

$$nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \quad \Longleftrightarrow \quad W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

4. Posons $u_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!}$, $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge en utilisant un développement limité, puis que la suite (u_n) converge vers un réel K.
Ici je mets de vrais corrigés car les questions précédentes ont déjà été faites en TD, cette partie est nouvelle.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \\
&= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}n!}{\sqrt{n}n^n e^{-n}(n+1)!}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{(n+1)^n \times (n+1)e^{-1}}{n^n(n+1)}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(e) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\sim \frac{1}{12n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \sim \frac{1}{12n^2}$ terme général d'une série convergente, qui est toujours positif donc $v_{n+1} - v_n$ est positif à partir d'un certain rang et par théorème de comparaison, $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.
Par ailleurs, il s'agit d'une série télescopique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_1$ et donc $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k$.
On en déduit que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et $u_n = \exp(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell} > 0$ par continuité de l'exponentielle. Ainsi, (u_n) converge vers $K = e^{\ell}$. On en déduit :

$$n! \sim \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{K}$$

5. En utilisant les intégrales de Wallis, montrer que $K = \sqrt{2\pi}$
Utilisons la partie précédente. On sait que $W_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$. D'après l'équivalent précédent :

$$\begin{aligned}
W_{2p} &\sim \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2p}(2p)^{2p}e^{-2p}}{K} \times \frac{1}{2^{2p}} \times \frac{K^2}{\sqrt{p}^2(p^p)^2(e^{-p})^2} \\
&\sim \frac{\pi}{2}\frac{K\sqrt{2p}}{p} \\
&\sim \frac{\pi K}{\sqrt{2p}}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'équivalent de la question 3 :

$$W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2p}}$$

Ainsi :

$$\pi K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

C'est une égalité et pas un équivalent car les deux sont des constantes. Finalement :

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

oups, erreur d'énoncé... ça serait $\sqrt{2\pi}$ *avec* $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}n^n e^{-n}}$. On obtient à la fin :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Cet équivalent est connu sous le nom de formule de Stirling.