Feuille d'exercices n°25 - post programme

Variables aléatoires

Exercice 1 (EM Lyon 2017). On considère une urne contenant initialement une bolue bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement "On obtient une boule bleue au k-ième tirage" et R_k l'événement "On obtient une boule rouge au k-ième tirage.
On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$
   (b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Une variance ?
2. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? une variance ?

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

3. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines des variables $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$
4. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
5. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)
   (b) En déduire la loi de X_2
   (c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [|0; n|]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$
   (b) Justifier :
   $$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$$
   En déduire : $\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et $E(S_n) = \frac{2n}{3}$
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer : $\forall k \in [|0; 1|], \mathbb{P}_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \frac{k+2}{n+3}$
   (b) En déduire : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)+2}{n+3}$
   (c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j + k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Prouver que 2^{X+Y} admet une espérance et la calculer.

Intégrales impropres

Exercice 3. La fonction gamma, notée Γ, est définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est bien définie.

On admet : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

3. En utilisant la valeur admise et le changement de variable $u = \sqrt{2t}$, calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$
4. En intégrant par parties, montrer : $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

Exercice 4. Montrer que les intégrales suivantes convergent et préciser leur valeur.

1. $I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ à l'aide du changement de variables $u = \sin(t)$
2. $J = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{t}$

Sommes, sommes doubles

Exercice 5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 6. Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

1. $\sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$
2. $\sum\limits_{0 \leqslant i<j \leqslant n} ij$
3. $\sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j} \ (x \in \mathbb{R})$
4. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p} \frac{3^i 4^j}{5^{i+j}}$
5. $\sum\limits_{1 \leqslant j<i \leqslant n} \frac{j}{i}$
6. $\sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$

Exercice 7. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i x_i$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) x_i$$

Exercice 8. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{p=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p$ et de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}$

Bijectivité

Exercice 9. Montrer que l'application $x \mapsto |2x+3|$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

Exercice 10. Soit $f : x \mapsto \frac{2x-1}{3x+2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{2}{3}\}$. Déterminer l'ensemble image $\mathcal{A}$ de f, montrer que f est bijective de $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{2}{3}\}$ vers $\mathcal{A}$ et déterminer f^{-1}

Exercice 11. De même pour la fonction $x \mapsto 3e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 12. Soit $f : (x,y,z,t) \mapsto (x+3y-z; 2x+y-z-t; x+y+t; y-z-3t)$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$.

Changements de bases

Exercice 13. Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f l'endomorphisme de E représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $e'_1 = e_2 + e_3; e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$

1. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2; e'_3)$ est une base de E
2. Déterminer la matrice D représentant f dans la base $\mathcal{B}'$
3. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et son inverse P^{-1}
4. Quelle relation relie les matrices A, D et P ?
5. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3; e'_2 = e_1 - e_3; e'_3 = e_1 - e_2$

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.
2. Déterminer la matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ (inversible) telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. En déduire le terme général des suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ définies par : $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Des exercices de rédaction / classiques

Exercice 16. Justifier que la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Exercice 17. On note $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$

1. Justifier que X est une variable aléatoire bien définie.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.
   On prendra particulièrement soin à toutes les étapes de rédaction pour justifier l'existence de l'espérance et la variance de X

Exercice 18. Justifier les implications suivantes :

1. $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \Rightarrow e^x \leqslant e^y$$
2. $$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \leqslant b \Rightarrow e^c a \leqslant e^c b$$
3. $$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+)^3, (a + b) \leqslant (a + c) \Rightarrow (a + b)^2 \leqslant (a + c)^2$$
4. $$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a \leqslant b \Rightarrow a^3 \leqslant a^2 b$$

Exercice 19. Montrer que l'ensemble des suites réelles bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice 20. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ définie par :

$$f_i = e_i + e_{i+1} \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad ; \quad f_n = e_n + e_1$$

1. Montrer que si $n = 3$, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
2. Montrer que si $n = 4$, la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est liée.

Exercice 21. Ajouter les arguments nécessaires à la rédaction de cette démonstration (étapes de calcul, nom de théorèmes, variables manquantes...) :

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[0;1]$. Posons : $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. L'objectif est de montrer :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt$$

On pose : $a_k = \frac{k}{n}$. Il existe un réel M tel que pour tout $t \in [a;b]$, $|f'(t)| \leqslant M$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) - \int_0^1 f(t)dt\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}f(a_k) - \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)dt\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(a_k)dt - \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)dt\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(a_k) - f(t))dt\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(a_k) - f(t)|dt \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} M|a_k - t|dt \\
&\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} (a_k - t)\,dt \\
&\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{-(a_k - t)^2}{2}\right]_{a_{k-1}}^{a_k} \\
&\leqslant \frac{M}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})^2 \\
&\leqslant \frac{M}{2n^2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc $|S_n - \int_0^1 f(t)dt| \to 0$ et donc $S_n \to \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 22 (Théorèmes du cours qui ont un nom). Pour chacune des propriétés / théorèmes suivants, lister les hypothèses à vérifier (et donc écrire sur sa copie) pour les utiliser :

- **Propriété de la borne supérieure** : ....
- **Inégalités à la limite** : ....
- **Théorème de la limite monotone** (suites) : ....
- **Théorème des suites adjacentes** : ....
- **Théorème de la limite monotone** (fonctions) : ....
- **Théorème des valeurs intermédiaires** : ....
- **Théorème des bornes** : ....
- **Théorème de la bijection** : ....
- **Formule du binôme de Newton** (matrices) : ....
- **Théorème de Rolle** : ....
- **Théorème des accroissements finis** (égalité) : ....
- **Théorème des accroissements finis** (inégalité) : ....
- **Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$** : ....
- **Théorème de division euclidienne** (polynômes) : ....
- **Formule de Taylor** (polynôme) : ....
- **Formule des probabilités composées** : ....
- **Formule des probabilités totales** : ....
- **Théorème fondamental de l'analyse** : ....
- **Théorème d'intégration par parties** : ....
- **Théorème de comparaison** pour la convergence de séries : ....

  ....
- **Théorème de comparaison** pour la convergence d'intégrales impropres : ....

  ....
- **Théorème de changement de variables** (intégrales impropres) : ....

  ....
- **Théorème de la base extraite** : ....
- **Théorème de la base incomplète** : ....
- **Formule du rang** : ....
- **Formule du binôme de Newton** (endomorphismes) : ....
- **Formule de Taylor avec reste intégral** : ....
- **Inégalité de Taylor-Lagrange** : ....
- **Formule de Taylor-Young** : ....
- **Théorème de la limite monotone** (probas) : ....
- **Théorème de transfert** (v.a.r.d) : ....
- **Linéarité de l'espérance** : ....
- **Formule de Koenig-Huygens** : ....
- **Inégalité de Markov** : ....
- **Inégalité de Bienaymé-Chebyshev** : ....
- **Loi faible des grands nombres** : ....
- D'autres théorèmes qui manquent ? ....

  ....

  ....

Un problème d'analyse

Exercice 23 (Écricome 2022). Dans cet exercice, on fixe a un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynômiale f_n définie par :

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1. (a) En notant pour tout réel x et pour tout entier naturel k, $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, exprimer pour k un entier naturel non nul la valeur de $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x), x$ et k

   (b) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
def f(x,n):
    t = 1
    s = 1
    for k in range(n):
        t = ...........
        s = ...........
    return s
```

2. Justifier que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n

3. (a) Soit x un réel positif. Montrer que la suite $(f_n(x))$ est croissante et déterminer sa limite.

   (b) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge.

4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(a) \leqslant u_n$

   (b) Soit K un réel positif et minorant la suite (u_n). Montrer : $e^K \leqslant a$

   (c) Déduire des questions précédentes : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(a)$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

5. (a) Justifier que la suite (u_n) est bornée. On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant M$$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(u_n)| \leqslant e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

   (c) En déduire :

$$R_n(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

6. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + R_n(x)$$

   (b) En utilisant $f_n(u_n) = a$, déduire des deux questions précédentes :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

(b) En déduire :

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

(c) Justifier :

$$\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire ensuite $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(d) En déduire finalement :

$$u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$$