Feuille d'exercices n°26 - post programme 2

Équivalents, petits o, développements limités

Exercice 1 (Règles et contournements)**.** Pour les questions «vrai ou faux» fournir une preuve ou un contre-exemple.

1. **Vrai** / **Faux :** si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$, alors $u_n + v_n \sim w_n + z_n$
2. Donner un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
3. Si $u_n \sim n$ et $v_n \sim n$, montrer que $u_n + v_n \sim 2n$
4. Trouver un équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. *On pourra utiliser un développement limité de* $\sin(x)$ *et de* $\ln(1+x)$ *en* 0
5. **Vrai/Faux** Si $u_n \sim v_n$ alors pour toute fonction f, $f(u_n) \sim f(v_n)$
6. Montrer que si $u_n \sim n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(n)$.
7. **Vrai** / **Faux** Si $u_n \sim v_n$, alors pour tout entier k, $u_n^k \sim v_n^k$
8. **Vrai** / **Faux** Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^n \sim v_n^n$
9. Montrer que si $u_n = a + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $u_n^n \sim a^n$. Et si $u_n = a + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Exercice 2. Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 de :

1. $\sqrt{1+3x}$
2. $\ln(1+x^2)$
3. $\exp(1+2x)$
4. $\exp(x^2)$
5. $\sin(x^2)$
6. $\frac{1}{2-x}$

Exercice 3 (Issu du cahier de calcul)**.** Donner un développement :

1. à la précision x^2, en 0, de : $\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$
2. à la précision $\frac{1}{x^5}$, en $+\infty$, de $\frac{\sin(1/x)}{x+1}$
3. à la précision $\frac{1}{x^3}$, en $+\infty$, de : $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$
4. à la précision $\frac{e^x}{x^2}$, en $+\infty$, de $\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2}$

Ici, «à la précision $f(x)$» signifie qu'on a une égalité et un $o(f(x))$

Projecteurs, algèbre linéaire et géométrie

Exercice 4 (Des espaces caractéristiques au projecteur)**.** On considère $F = \{(x,y,z) | x+z=0\}$ et $G = \text{Vect}((1;-1;1))$

1. (a) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G
   (b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
2. On considère le projecteur p sur F parallèlement à G
   (a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
   (c) Donner $p((x,y,z))$ pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
3. Soit q le projecteur sur G parallèlement à F. Déterminer $q((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 5 (Du projecteur à ses espaces caractéristiques)**.** Pour tout (a,b,c) on pose :

$$f(ax^2+bx+c) = (a+3b+3c)x^2 + (2b+c)x - 2b - c$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$, déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f
3. Montrer :$\ker(f) \oplus \text{im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$

4. Montrer que f est un projecteur sur un espace F parallèlement à un espace G et préciser F et G
5. Déterminer un polynôme annulateur de f
6. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 (Plus abstrait, somme de projecteurs)**.** Soient p, q deux projecteurs définis sur un espace vectoriel E.

1. Montrer l'équivalence entre :
   (a) $p + q$ est un projecteur
   (b) $p \circ q = q \circ p = 0$
2. Montrer que lorsque $p + q$ est un projecteur :
   (a) $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$
   (b) $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im} \oplus \mathrm{Im}(q)$

Exercice 7 (Commutation et stabilité)**.** Définition : *On dit que F est stable par g si pour tout $x \in F$, $g(x) \in F$*

Soient u, v des endomorphismes de E. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.

Extrait d'un problème d'analyse - intégrales (ESSEC 1992)

Exercice 8.

1. On désigne par p, q des entiers naturels et on étudie l'intégrale :

$$I(p; q) = \int_0^1 t^{2p}(1 - t^2)qdt$$

   (a) On suppose $q \geqslant 1$. Trouver une relation de récurrence entre $I(p; q)$ et $I(p + 1, q - 1)$
   (b) En déduire l'expression de $I(p; q)$ à l'aide de factorielles.
   (c) On note $J(p)$ la quantité $I(p; p)$. Exprimer $J(p)$ à l'aide de factorielles.
   (d) Dresser le tableau de variations sur $[0; 1]$ de la fonction $t \mapsto t^2(1 - t^2)$
   (e) Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leqslant J(p) \leqslant \frac{1}{4^p}$
2. On étudie dans cette question l'intégrale : $f(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t^2}$
   (a) Calculer $f(1)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(\theta)$
   (b) Établir, pour $a \neq 1$, l'égalité :

$$f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1)$$

   On pourra utiliser le changement de variable : $t = \frac{ax-1}{x+a}$
   (c) Montrer : $f(a) = a \int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}$