# Ensemble de nombres

Notations :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des **nombres décimaux**.
  Un nombre décimal est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10 : $\frac{a}{10^n}$.
  Les nombres décimaux sont ceux qui ont une écriture décimale finie.
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des **nombres rationnels**, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a$ est un entier relatif, et $b$ un entier naturel non nul.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}^*, \mathbb{R}^*(\ldots)$ désignent les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ privés de 0
- Lorsque un élément $x$ fait partie d'un ensemble $E$, on note $x \in E$ et on dit que $x$ appartient à $E$ (ou que $x$ est élément de $E$). Si ce n'est pas le cas, on note $x \notin E$.

**Exemples**

- $-1$ est $\cdots$

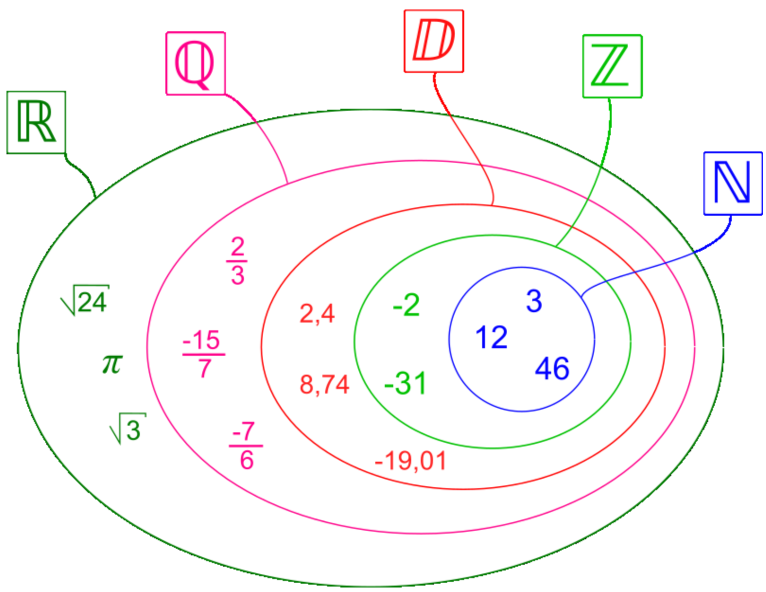
  On peut écrire cela sous la forme :
- De même, $\frac{1}{2}$ $\cdots$ et $\sqrt{2}$ $\cdots$
- $\frac{3}{25} = \frac{\cdots}{100}$ donc $\frac{3}{25} \in \cdots$

Remarques : l'écriture d'un nombre n'est pas unique.

Par exemple, le nombre $\frac{56}{4}$ est un nombre rationnel, égal à $\frac{28}{2}$ (qui est aussi un nombre rationnel), également égal à 14 qui est un entier naturel.

Remarque : les ensembles sont « imbriqués » les uns dans les autres selon le schéma ci-contre.

En utilisant le signe $\subset$ qui signifie « est inclus dans », on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



# Calculs algébriques - les fractions

<u>Définitions</u> :

- lorsque $b$ est un réel non nul, **l'inverse** de $b$ est le réel $x$ tel que : $x \times b = 1$.

  On le note $\dfrac{1}{b}$ ou encore $b^{-1}$.

- lorsque $a$ est un réel, et $b$ un réel non nul, le réel $\dfrac{a}{b}$ est le produit $a \times \dfrac{1}{b}$

**Propriétés** : soient $a$, $b$, $c$ et $d$ trois réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

**1.** $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

**2.** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times d}{b \times d}$

**3.** $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}$

**4.** $\dfrac{a \times c}{b} = a \times \dfrac{c}{b} = c \times \dfrac{a}{b}$

**5.** $\dfrac{a \times c}{b \times d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{d} \times \dfrac{c}{b}$

**Attention** il n'y a pas de transformation pour $\dfrac{a}{b+c}$

**Exemples**

**1.** pour $x$ un réel, $-\dfrac{x-1}{x^2+2} = \cdots$

**2.** pour $x \neq 0$, $\dfrac{x+e^x}{x} = \cdots$

**3.** pour $x > 0$, $\dfrac{x^3 + x^2 \ln(x) + 1}{x} = \cdots$

**4.** pour $x > 0$, $\dfrac{(x+1)^2}{x+3} \times \dfrac{x+3}{\ln(x)} = \cdots$

**5.** soit $x$ un réel non nul, $\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{6}{x}\right)}{x} = \cdots$

# Calculs algébriques - Puissances entières

Définitions :

- par définition, $a^0 = 1$, quel que soit $a \in \mathbb{R}$
- pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \quad \text{fois}}$
- soit $a$ un réel tel que $\boxed{a \neq 0}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $a^{-n}$ comme $\dfrac{1}{a^n}$

Remarques : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x^1 = x$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

**Propriétés** : soient $m, n \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors quand les expressions sont bien définies :

**1.** $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ (pour $a \in \mathbb{R}^*$) **2.** $a^n \times a^m = a^{n+m}$ **3.** $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

**4.** $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$ **5.** $a^n b^n = (ab)^n$ **6.** $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

- $(-3)^0 = \cdots$ ; $5^3 = \cdots$ ; $(-2)^5 = \cdots$ $3^{-2} = \cdots$

  $(-1)^n = \Big\{$ et $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 = \cdots$

- Soient $x$ et $y$ des réels.

  ▷ $x^2 \times x^4 = \cdots$ ; $(x^2)^4 = \cdots$ et $x^2 y^4 = \cdots$

  ▷ si $x \neq 0$ alors : $x^2 \times x^{-5} = \cdots$ et $(x^2)^{-5} = \cdots$

  Remarque : attention aux parenthèses ! Par exemple : $(-3)^2 = \cdots$ alors que $-3^2 = \cdots$

# Factorisations et développements
# Identités remarquables

| **Forme développée** | | **Forme factorisée** |
|---|---|---|
| $a^2 + 2ab + b^2$ | $=$ | $(a+b)^2$ |
| $a^2 - 2ab + b^2$ | $=$ | $(a-b)^2$ |
| $a^2 - b^2$ | $=$ | $(a+b)(a-b)$ |

**Exemples :**

$x^2 + 10x + 25 =$

$2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 =$

$4x^2 + 12x + 9 =$

$x^2 - 49 =$

$x^2 - 2x + 1 =$

$x^6 - 81 =$

# Inégalités

Dans cette section, $a, b, c, d$ et $x$ désignent des nombres réels.

**Propriétés de base** :

- on a toujours $a \leqslant a$
- **transitivité**, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$
- si $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases}$ alors $a = b$

Définition de l'inégalité stricte : $a < b$ signifie : $a \leqslant b$ et $a \neq b$

Remarque : ainsi, si on a $a < b$, on peut dire que $a \leqslant b$.

Par contre, si on a $a \leqslant b$, on ne peut pas dire que $a < b$.

Par exemple, on a bien $3 \leqslant 3$, mais il est faux de dire que $3 < 3$.

# Inégalités et opérations - Somme et produit

**Propriétés**

- si $a \leqslant b$ alors $a + x \leqslant b + x$ et $a - x \leqslant b - x$
- si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ alors $a + c \leqslant b + d$
- si $\begin{cases} a \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ alors $ax \leqslant bx$ et si $\begin{cases} a \leqslant b \\ x \leqslant 0 \end{cases}$ alors $ax \geqslant bx$
- si $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases}$ alors $0 \leqslant ac \leqslant bd$

Remarque : des propriétés analogues existent avec des inégalités strictes.

**Exemples**

- si $1 < a < 2$, et $-5 < b < -3$ alors que peut-on dire de $a + b$ ? et de $a - b$ ?

- si $1 < a < 2$ et $3 < -b < 5$, que peut-on dire de $ab$ ?