Objectif 1 : savoir utiliser les propriétés des polynômes du second degré

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x+3)(2x-5)(6x+2)=0$

$(x+3)(2x-5)(6x+2)=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $2x-5=0$ ou $6x+2=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=\dfrac{5}{2}$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$

2. $x^2-12=0$ $\quad x^2-12=0 \Leftrightarrow x^2=12 \Leftrightarrow x=-\sqrt{12}$ ou $x=\sqrt{12}$

3. $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{2}{x+1}$ $\quad$ Sur $\mathbb{R}\setminus\{4;-1\}$, $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow 3(x+1)=2(x-4) \Leftrightarrow 3x+3=2x-8 \Leftrightarrow x=-11$

4. $\dfrac{2x+1}{x-3}=-\dfrac{2x-1}{x+3}$

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$, alors $\dfrac{2x+1}{x-3}=-\dfrac{2x-1}{x+3} \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\dfrac{2x+1}{x-3}=-(x-3)(x+3)\dfrac{2x-1}{x+3}$
$\Leftrightarrow (x+3)(2x+1)=-(x-3)(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2+6x+x+3=-(2x^2-6x-x+3)$
$\Leftrightarrow 2x^2+7x+3=-2x^2+7x-3 \Leftrightarrow 4x^2+6=0$
or $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}, 4x^2+6>0$ donc l'équation n'admet aucune solution
Nota Bene : on peut aussi résoudre l'équation en regroupant les fractions et en les réduisant au même dénominateur.

5. $x^2+x+1=0$
Cette équation n'admet aucune solution car son discriminant est strictement négatif : $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$

6. $x^2-x+1=0$ $\quad$ Cette équation n'admet aucune solution car son discriminant est strictement négatif : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3$; c'est d'ailleurs le même discriminant que précédemment

7. $\dfrac{x+1}{x-1}=x$ $\quad$ avec $x\neq1$, $\dfrac{x+1}{x-1}=x \Leftrightarrow (x-1)\dfrac{x+1}{x-1}=(x-1)x \Leftrightarrow x+1=(x-1)x \Leftrightarrow x+1=x^2-x$
$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$, nous sommes donc ramenés à une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8$, cette équation admet donc deux racines,
$x_1=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ car $\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{4}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

8. $x^2-2x-3=0$ $\quad$ on peut remarquer que -1 est une racine évidente de cette équation.
Or le produit des deux racines vaut $\dfrac{c}{a}=-3$, donc $x_2=3$

9. $x^2-x-1=0$
le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$
Cette équation admet donc deux racines, $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

10. $3x^2+x-2=0$

on peut remarquer que -1 est une racine évidente de cette équation
Or le produit des deux racines vaut $\dfrac{c}{a}=-\dfrac{2}{3}$, donc $x_2=\dfrac{2}{3}$

11. $-x^2-5x+1=0$

le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta=(-5)^2-4\times(-1)\times1=29$
Cette équation admet donc deux racines, $x_1=\dfrac{5-\sqrt{29}}{-2}=\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$

12. $\dfrac{1}{x}=x-1$ $\quad$ Pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}=x-1 \Leftrightarrow 1=x(x-1) \Leftrightarrow x^2-x-1=0$, nous sommes donc ramenés à l'équation du second degré **9**