Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x}$

tout d'abord, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0;2\}$

et pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 2$, $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2x(x-2)} - \dfrac{2x}{2x(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\dfrac{-x-2}{2x(x-2)} \geq 0$. On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	-		-		-	
$2x(x-2)$		$+$		$+$	0	-	0	$+$	
$\dfrac{-x-2}{2x(x-2)}$		$+$	0	-	$\Vert$	$+$	$\Vert$	-	

Et donc $S =]-\infty; -2] \cup]0; 2[$

2. $\dfrac{2x+1}{1+x} \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x}$

tout d'abord, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

et pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{2x+1}{1+x} \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x} \Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{1+x} - \dfrac{2x+1}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{1+x} \geq 0$

Ce quotient est du même signe que le polynôme $(x-3)(x+1)$ pour lequel on a $a = 1 > 0$

Et donc $S =]-\infty; -1[\cup [3; +\infty[$

3. $x - \dfrac{2}{x} > 1$

tout d'abord, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

et pour tout $x \neq 0$, $x - \dfrac{2}{x} > 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{2}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2-x}{x} > 0$

Or le polynôme $x^2 - x - 2$ admet -1 et 2 pour racines.

Et comme $a = 1 > 0$, on obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	-		-	0	$+$	
x		-		-	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-x-2}{x}$		-	$\Vert$	$+$	0	-	$\Vert$	$+$	

Et donc $S =]-1; 0[\cup]2; +\infty[$

4. $-4x + 7 \leqslant -6$

$-4x + 7 \leqslant -6 \Leftrightarrow -4x \leq -13 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{13}{4}$ d'où $S = [\dfrac{13}{4}; +\infty[$

5. $x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$

Le trinôme $x^2 - 3x - 10$ admet -2 et 5 pour racines

et comme $a = 1 > 0$, on obtient : $S =]-\infty; -2] \cup [5; +\infty[$

6. $x^3 + 5x \leqslant 6x \Leftrightarrow x^3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \leq 0$

On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		-		-	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	-		-	0	$+$	
$x(x-1)(x+1)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	

Et donc $S =]-\infty, -1] \cup [0, 1]$