1 Fonctions trinômes du second degré

Définition : Soit a, b, et c trois réels, tels que $a \neq 0$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une appelée **fonction trinôme du second degré**, ou bien **fonction polynôme de degré** 2.

Propriétés : Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

On s'intéresse à l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (le discriminant).

$\Delta > 0$	**Solutions de l'équation :**	l'équation (E) admet deux solutions (racines) : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Factorisation :	pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
	Signe :	le polynôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur
	Propriété :	La somme des deux racines est toujours égale à $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit à $\dfrac{c}{a}$
$\Delta = 0$	**Solutions de l'équation :**	l'équation (E) admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
	Factorisation :	pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
	Signe :	le polynôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf en a ou il s'annule
$\Delta < 0$	**Solutions de l'équation :**	l'équation (E) n'admet aucune solution
	Factorisation :	il n'y a pas de factorisation pour $ax^2 + bx + c$
	Signe :	le polynôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a.

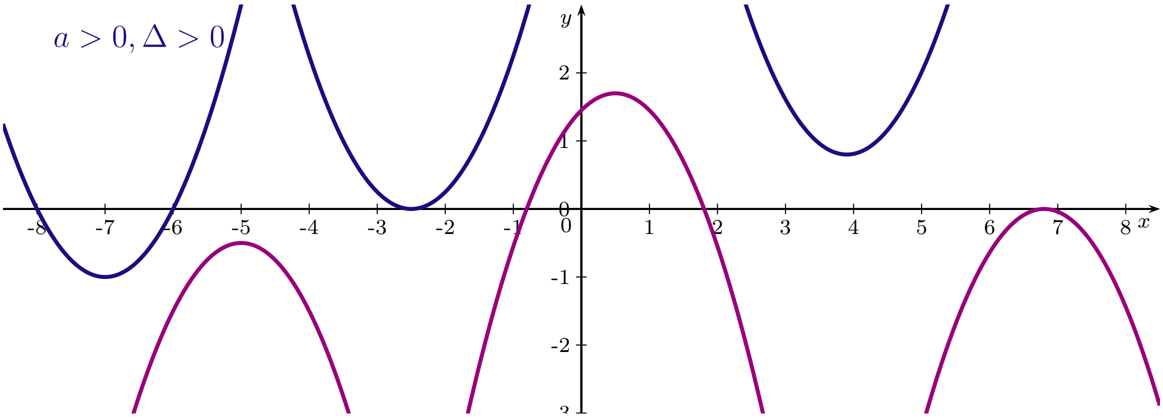
Savoir faire n°1 - savoir déterminer les racines, factoriser ou étudier le signe d'une trinôme

- Résoudre l'équation $2x^2 - x - 3 = 0$:

- Résoudre l'inéquation $3x^2 + 2x + \dfrac{1}{3} > 0$:

- Etudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

Propriétés : La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole, orientée vers le haut lorsque $a > 0$, et orientée vers le bas lorsque $a < 0$.
Son sommet a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$



2 Fonctions puissances entières

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit **la fonction puissance** n par $p_n(x) = x^n$

Propriété : soit $n \in \mathbb{Z}$,

- pour $n \geqslant 0$, la fonction p_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- pour $n < 0$, la fonction p_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- si $n \neq 0$, on a $p_n'(x) = nx^{n-1}$ et cette expression est valable :
  ▷ pour tout x si $n \geqslant 0$ ▷ pour $x \neq 0$ si $n < 0$

Exemple : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Alors h est dérivable sur $\cdots$

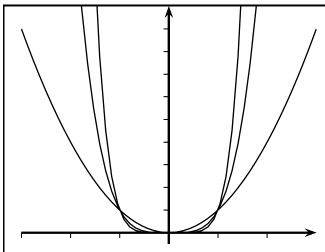
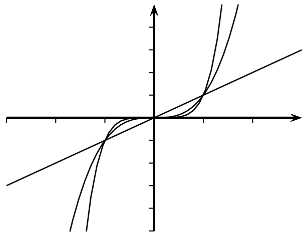
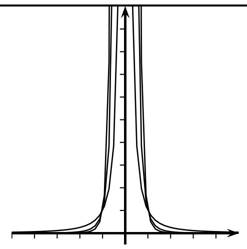
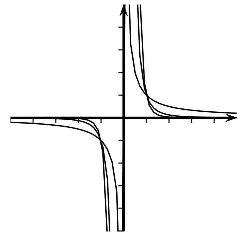
Remarque : attention les formules de dérivation ci-dessus ne sont pas valables pour $n = 0$
La fonction p_0 est constante égale à 1, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_0'(x) = 0$

Propriété : soit $n \in \mathbb{Z}$,

- Parité : si n est pair, la fonction p_n est paire. Si n est impair, la fonction p_n est impaire.
- Monotonie :
  ▷ pour $n > 0$:
  si n est pair, p_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
  si n est impair, p_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  ▷ pour $n < 0$:
  si n est pair, p_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
  si n est impair, p_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Exemples : $x \mapsto x^6, x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ sont des fonctions paires et $x \mapsto x^{11}, x \mapsto \dfrac{1}{x^7}$ des fonctions impaires.
$x \mapsto x^6, x \mapsto x^{11}, x \mapsto \dfrac{1}{x^7}$ suivent respectivement les mêmes variations que $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Représentation graphique :

			
n pair et $n \geqslant 2$	n impair et $n \geqslant 1$	n pair et $n \leqslant -2$	n impair et $n \leqslant -1$
exemples $x \mapsto x^2$ à x^6	exemples $x \mapsto x$ à x^5	exemples $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ à $\dfrac{1}{x^6}$	exemples $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à $\dfrac{1}{x^5}$

3 Fonction valeur absolue

Définition : la fonction **valeur absolue**, notée $|\ |$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, la valeur absolue d'un nombre réel x correspond à la distance entre le point O et le point M d'abscisse x sur une droite graduée.

Exemples : $|1| =$ $\qquad |-7| =$ $\qquad |0| =$

Propriétés :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geqslant 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x|$

3. Soit a et b deux réels. Alors $|ab| = |a| \times |b|$. En conséquence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a^n| = |a|^n$.

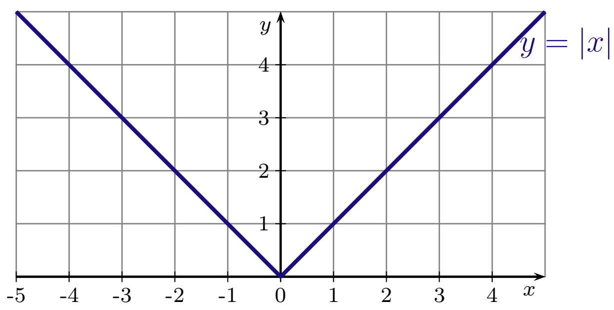
4. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$, alors $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

⚠ **Attention** $|a+b| \neq |a| + |b|$. Par exemple :

Propriétés :

1. la fonction valeur absolue est paire.

2. la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$



Remarque : la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Propriétés : pour tout x réel et $\alpha \geqslant 0$,

1. $|x| = \alpha \iff (x = \alpha \quad \text{ou} \quad x = -\alpha)$

2. $|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ $\qquad |x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha$

$|x| \geqslant \alpha \iff (x \geqslant \alpha \quad \text{ou} \quad x \leqslant -\alpha)$

3. pour a et b réels, $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (cette inégalité est appelée **l'inégalité triangulaire**.)

Savoir-faire n°2 : savoir résoudre des équations et des inéquations comportant des valeurs absolues
Résoudre l'inéquation $|x-3|<2$ et l'équation $|2x-4|=|x+3|$.

4 Fonction inverse

<u>Définition</u> : La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

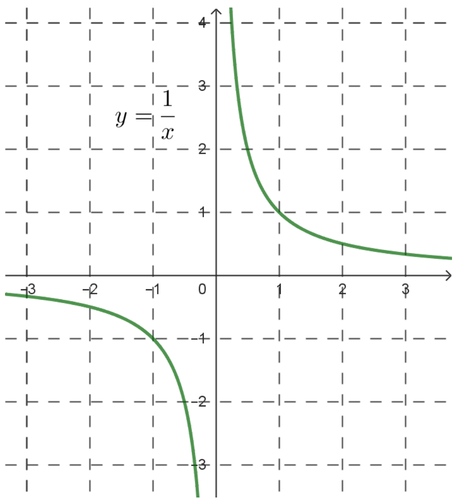
Propriétés :

1. La fonction inverse est impaire
2. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
3. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ ainsi que sur $]0;+\infty[$
   En conséquence : si $0<a\leqslant b$ alors $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$ et si $a\leqslant b<0$ alors $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$

⚠**Attention !** on ne peut pas dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}-\{0\}$.
En effet , on a par exemple :

Savoir-faire n°3 : savoir utiliser les propriétés de la fonction inverse
Si $1<a<2$ **et** $-5<b<-3$
alors que peut-on dire de $\dfrac{b}{a}$ **? et de** $\dfrac{a}{b}$ **?**

<u>Représentation graphique :</u>



5 Fonction racine carrée

<u>Rappels :</u> La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$

La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$
En conséquence : si $a\leqslant b\leqslant 0$ alors $a^2\geqslant b^2$ et si $0\leqslant a\leqslant b$ alors $a^2\leqslant b^2$

<u>Définition</u> : pour tout $y\in\mathbb{R}_+$, $\sqrt{y}$ est l'unique $x\geqslant 0$ tel que $x^2=y$
la fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x\mapsto\sqrt{x}$

Propriétés : **1.** $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ **2.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$

Remarques :

- $\sqrt{x}$ n'existe que si $x \in \mathbb{R}_+$
- Par définition, pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$
- **2.** permet d'illustrer la perte d'équivalence quand on élève une égalité au carré

Savoir-faire n°4 : savoir résoudre une équation comportant de la racine carrée
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{x} + 2$

Propriétés algébriques : pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, on a :
1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ **2.** si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

⚠**Attention !** $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple : $\sqrt{3^2 + 4^2} = \cdots$

Savoir-faire n°4 : savoir utiliser les propriétés de la fonction racine carrée

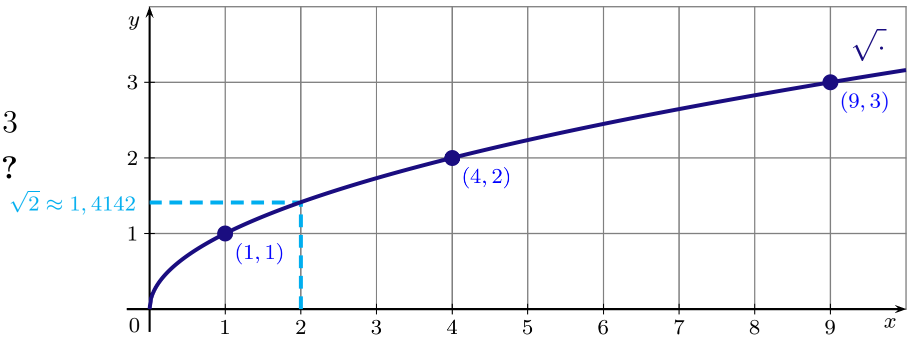
Compléter : $\sqrt{27} = \cdots$ $\sqrt{8} = \cdots$ $\sqrt{\dfrac{21}{25}} = \cdots$ $\sqrt{(-3)^2} = \cdots$

Propriétés fonctionnelles :

- la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est, pour $x \in \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
  En conséquence : si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$

Savoir-faire n°4 bis :
savoir utiliser les propriétés de la fonction racine carrée
Si $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$ alors que peut-on dire de $\dfrac{1}{b^2}$? de $\sqrt{a^2-1}$? En déduire un encadrement de $\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{b^2}$.

Représentation graphique :



6 Fonction partie entière

Définition : on appelle fonction **partie entière** la fonction :

$$\lfloor . \rfloor : \begin{array}{ccccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} & & \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor & = & n \qquad \text{avec} \quad n \leqslant x < n+1 \end{array}$$

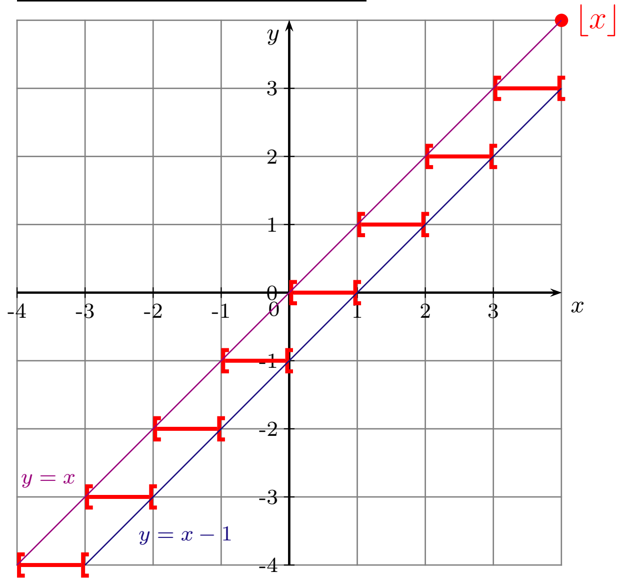
On dit aussi que la **partie entière** de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x

Remarque : cette définition sous-entend que l'entier n est unique, ce qui est le cas.

Exemples : $\lfloor 2,5 \rfloor =$ $\qquad \lfloor \pi \rfloor =$ $\qquad \lfloor \sqrt{2} \rfloor =$

$\lfloor 1 \rfloor =$ $\qquad \lfloor e \rfloor =$ $\qquad \lfloor -1,5 \rfloor =$ $\qquad \lfloor n \rfloor =$

Représentation graphique :



Propriétés : pour $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1. $\lfloor n \rfloor = n$

2. $x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$

3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

4. $n \leqslant x \Rightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor$

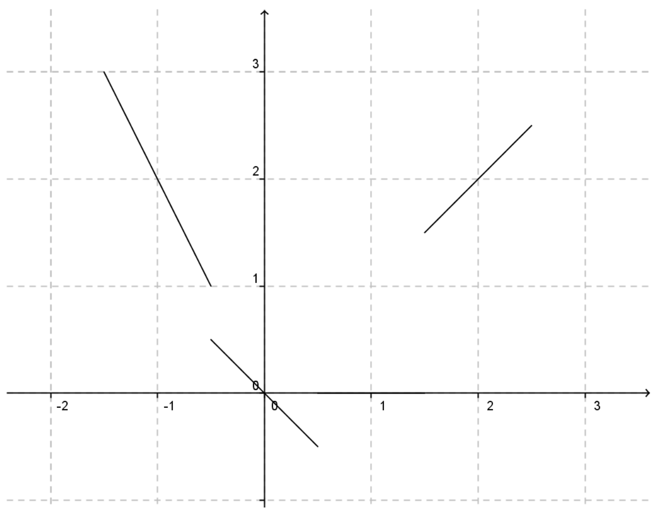
Remarques :

- **2.** ne dit rien d'autre que « la fonction partie entière est croissante », mais elle ne l'est pas strictement (cf. représentation graphique) ;
- c'est LE exemple de fonction discontinue à connaitre.

Savoir-faire n°5 : savoir utiliser les propriétés de la fonction partie entière

Soit f la fonction définie sur $[-1,5; 2,5[$ par : $f(x) = x\lfloor x - 0,5 \rfloor$.

Exprimer $f(x)$ en distinguant plusieurs intervalles puis compléter la représentation graphique de f donnée ci-contre.



7 La fonction exponentielle

Définition : la fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en 0 et qui est égale à sa propre dérivée.

Notation : On note e la valeur de la fonction exponentielle en 1. On a : $e \approx 2,72$.
On obtient alors une nouvelle notation de la fonction exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Et on a donc : $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Propriétés algébriques :

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a e^b$

2. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

3. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^a)^n = e^{an}$

Propriété fonctionnelle :

La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Conséquence :

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On a donc : pour tous réels a et b :
$e^a = e^b \iff a = b\,; \quad e^a < e^b \iff a < b; \cdots$

Savoir-faire n°6 : savoir utiliser les propriétés de la fonction exponentielle

1. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$

$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

$C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

$D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$ puis l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

8 Le logarithme népérien

Définition : pour tout $x \in [0; +\infty[$, on note $\ln(x)$ l'unique $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $e^x = t$.
on peut alors définir la fonction logarithme népérien, notée ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui à $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe $\ln(x)$.

Propriétés algébriques : avec $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

En particulier : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

3. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$

4. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Propriétés fonctionnelles :

1. $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ \ln(t) = x \iff t = e^x$

En conséquence : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln(e^x) = x$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ e^{\ln(t)} = t$

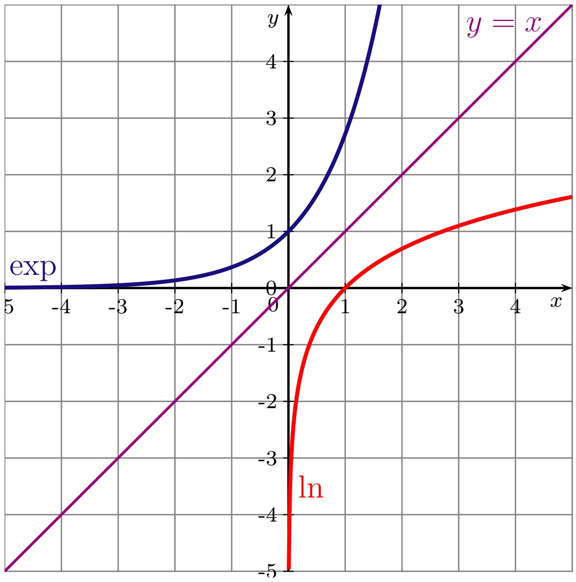
3. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

En conséquence : la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Et donc : $\ln a = \ln b \iff a = b$;

$\ln a < \ln b \iff a < b; \ \cdots$



Propriété : les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Savoir-faire n°7 : savoir utiliser les propriétés de la fonction logarithme népérien

1. Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$	$B = 3\ln 2 + \ln 6 - \ln 9$	$C = \ln e^2 - \ln \dfrac{2}{e}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$