

1 Domaine de définition

Définition : le **domaine de définition**, noté généralement $\mathcal{D}_f$, d'une fonction f est l'ensemble des réels x tels que l'on puisse définir le nombre $f(x)$. On dit que f est définie sur $\mathcal{D}_f$.

La fonction f , de domaine de définition $\mathcal{D}_f$, est notée ainsi : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Les trois fonctions usuelles présentant un problème de définition sont :

Savoir-faire n°1 : savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

Fonction	contrainte	$\mathcal{D}_f$
$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$		
$f(x) = \sqrt{x-3}$		
$f(x) = \ln(2-x)$		
$f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$		
$f(x) = \ln(x^2-6x+9)$		

2 Parité

Définitions : Une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ est **symétrique par rapport à zéro** lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ **symétrique par rapport à zéro**.

- On dit que f est **paire** sur $\mathcal{D}_f$ lorsque $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$
- On dit que f est **impaire** sur $\mathcal{D}_f$ lorsque $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$

Exemples :

- Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ sont symétriques par rapport à zéro.
Par contre, $\mathbb{N}$ ne sont pas symétriques par rapport à zéro.
- parmi les fonctions usuelles, les fonctions $f(x) = x^2, f(x) = \cos(x)$ sont paires et les fonctions $f(x) = x, f(x) = \sin(x)$ sont impaires.

Savoir-faire n°2 : savoir démontrer qu'une fonction est paire ou impaire

Etudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x^2)$.

▷ 1^e étape : vérifier la symétrie du domaine de définition

▷ 2^e étape : calculer $f(-x)$ et le comparer à $f(x)$ ou à $-f(x)$

▷ 3^e étape : conclure

Propriété :

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

3 Sens de variation

Définitions : soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et E une partie de $\mathcal{D}_f$, on dit que

- f est **croissante sur E** (respectivement **décroissante sur E**) si :
 $\forall a_1 \in E, \forall a_2 \in E, (a_1 \leq a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2))$ resp. $(a_1 \leq a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2))$
- f est **strictement croissante sur E** (resp. **strictement décroissante sur E**) si :
 $\forall a_1 \in E, \forall a_2 \in E, (a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2))$ resp. $(a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) > f(a_2))$
- f est (strictement) **monotone sur E** si elle est (strictement) croissante sur E , ou bien (strictement) décroissante sur E

Exemples :

Fonction	$\mathcal{D}_f$	croissance ou décroissance	monotone
$f(x) = x^3$			
$f(x) = x^2$			
$f(x) = \frac{1}{x}$			

Remarques :

- les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes sur E sont constantes sur E ;
- la somme de deux fonctions croissantes sur E est croissante sur E ;
- la monotonie permet de justifier des inégalités.

Par exemple : $0 \leq x \leq 12 \Rightarrow x^2 \dots\dots\dots$

Mais comment étudie-t-on le sens de variation d'une fonction ?

On peut le faire

- par manipulation d'inégalités

Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; 0]$.

En effet :

- mais plus généralement, on le fait en étudiant le signe de la dérivée de cette fonction.

Formules des dérivées des fonctions usuelles

Ensemble de définition de f	$f(x)$	Ensemble de dérivabilité de f	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$ax + b$	$\mathbb{R}$	a
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n < 0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \notin \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Fonctions dérivables : opérations

Pour x tel que	f	f'
	λu	$\lambda u'$
	$u + v$	$u' + v'$
	uv	$u'v + uv'$
$v(x) \neq 0$	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$v(x) \neq 0$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Fonctions dérivables : compositions

$u(x) > 0$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(x) > 0$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
	e^u	$u'e^u$
	u^n avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$nu'u^{n-1}$
$u(x) \neq 0$	u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \notin \mathbb{N}$	$nu'u^{n-1}$
$u(x) > 0$	u^α avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$	$\alpha u'u^{\alpha-1}$

Savoir-faire n°3 : déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée d'une fonction

Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x}$:

2. $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$:

3. $h(x) = 2x^7 - 3x^4 + 5 - \frac{1}{x^3}$:

4. $k(x) = e^{\sqrt{x+1}}$:

5. $l(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$:

Théorème : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I .
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I et f' ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.

En particulier, si $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante.

- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I et f' ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.

En particulier, si $f' < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante.

Savoir-faire n°4 : savoir étudier le sens de variation d'une fonction

Etudier les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$ et $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

4 Majorants, minorants, extremums

Définitions : soit f une fonction définie sur E et soit M et m des réels

- on dit que f est **majorée par** M sur E ou que M est un **majorant de** f sur E lorsque :
pour tout $x \in E$, on a $f(x) \leq M$
- on dit que f est **minorée par** m sur E ou que m est un **minorant de** f sur E lorsque :
pour tout $x \in E$, on a $f(x) \geq m$
- si f admet un majorant (respectivement un minorant), on dit que f est **majorée** (resp. **minorée**)
- on dit que f est **bornée** sur E lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Définitions : soit f une fonction définie sur un ensemble E et $a \in E$, on dit que

- f admet un **maximum** en a si : $\forall x \in E, f(x) \leq f(a)$. La valeur $f(a)$ est le **maximum** de f .
- f admet un **minimum** en a si : $\forall x \in E, f(x) \geq f(a)$. La valeur $f(a)$ est le **minimum** de f
- f admet un **extremum** lorsque f admet soit un maximum, soit un minimum en a .

Remarques : on parle aussi de **minimum ou maximum local** (et donc d'extremum local), lorsqu'une fonction admet un minimum ou un maximum sur une partie de l'ensemble de définition. Pour lever une éventuelle ambiguïté, on précise parfois « maximum global » (« ou minimum global ») pour parler du maximum (ou du minimum).

Exemples :

Fonction	minorant	minimum	majorant	maximum
$f(x) = x^2$				
$f(x) = x^3$				
$f(x) = \frac{1}{x}$				
$f(x) = \ln x$				
$f(x) = e^x$				
$f(x) = \sin(x)$				

Savoir-faire n°5 : savoir déterminer un extremum d'une fonction

Proposer pour les fonctions du savoir-faire n°4 un minorant et un majorant. Ces fonctions admettent-elles un maximum local ou global ? un minimum local ou global ?

Théorème : Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur I .
Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

⚠ Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de la fonction cube, dont la dérivée s'annule en 0, mais qui ne possède pas d'extremum en ce point.

Remarque : si la dérivée d'une fonction s'annule en un point de son ensemble de définition et change de signe alors ce point correspond à un extremum local :

- si la dérivée est négative avant ce point (f décroissante) puis positive après (f croissante) alors il s'agit d'un minimum local.
- si la dérivée est positive avant ce point (f croissante) puis négative après (f décroissante) alors il s'agit d'un maximum local.

5 Courbe représentative

Définition : La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $f(x) = y$ et $x \in \mathcal{D}_f$.

Propriété : soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

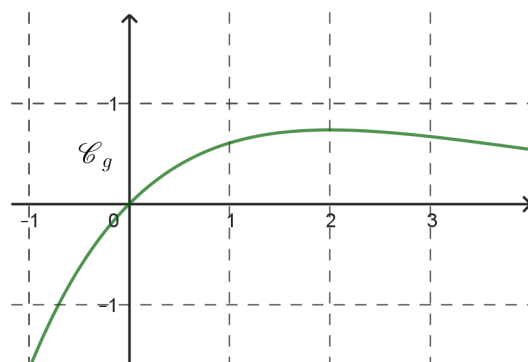
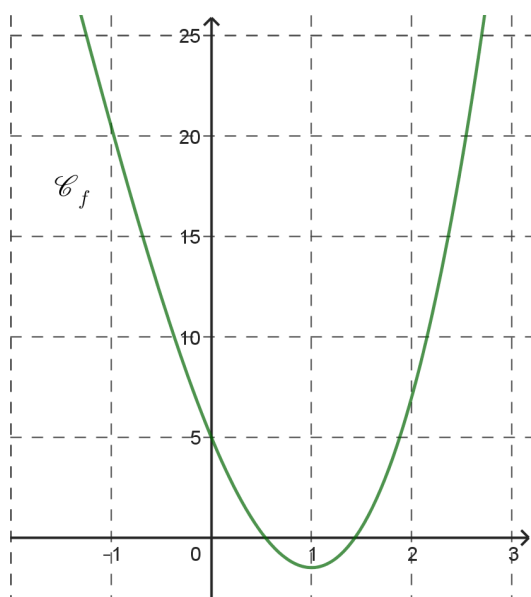
Alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point A d'abscisse a .

De plus, cette droite a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Remarque : la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui représente le mieux la courbe autour du point A .

Savoir-faire n°6 : savoir déterminer et tracer la tangente à une courbe

On a tracé ci-dessous une partie des représentations graphiques des fonctions f et g du savoir-faire n°4.



Déterminer et tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 , puis déterminer et tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0 .

6 Des nouvelles fonctions usuelles : les fonctions puissances quelconques

La propriété du logarithme : $\ln(a^n) = n \ln(a)$ entraîne, en composant par l'exponentielle, que pour tout réel a et pour tout entier n : $a^n = e^{n \ln(a)}$ Cela nous permet de donner une nouvelle définition de la notion de puissance pour des valeurs non entières (et **pour** $x > 0$) :

Définition : soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$)

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle x **puissance** α et on note x^α le réel $e^{\alpha \ln(x)}$
- on définit alors la fonction puissance α , par $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

⚠ **Attention !** cette définition n'est valable que pour $x > 0$!

Propriétés : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{x \times x \times \dots \times x}_n \text{ fois} = e^{n \ln(x)}$

2. $1^\alpha = 1$ et $x^0 = 1$

3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

4. $x^{(\alpha+\beta)} = x^\alpha x^\beta$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$; $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$; $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$

Remarques :

- 1. signifie que la définition générale des puissances peut être étendue aux puissances entières (pour un nombre positif) et 4. signifie que, avec cette définition, on retrouve toutes les propriétés de calcul des puissances entières.
- Avec cette définition, on trouve aussi $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ puisque $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^1 = x = (\sqrt{x})^2$

Propriétés : soit $\alpha \in \mathbb{R}$

1. la fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

2. si $\alpha > 0$, la fonction puissance α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

3. si $\alpha < 0$, la fonction puissance α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Remarques :

- φ_0 , la fonction « puissance 0 » est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$;
- on retrouve la formule de dérivation pour les puissances entières (valable sur $\mathbb{R}$), mais **attention**, elle n'est valable ici que sur $\mathbb{R}_+^*$;
- graphiquement, on distingue 3 familles de courbe :
 $\alpha > 1$; $0 < \alpha < 1$; $\alpha < 0$

Plus généralement, on a :

Définition : soit u et v deux fonctions . Pour tout réel x tel que $u(x) > 0$, on définit l'expression

$$u(x)^{v(x)} \text{ par } u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$$

Savoir-faire n°7 : savoir étudier une fonction puissance

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x$.

Déterminer $\mathcal{D}_f$ et étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$

Représentation graphique :

