Objectif 1 : savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction

Exercice 1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^{-4}$: c'est du cours : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^3+x^2+x}$:

   pour que g soit définie il faut que l'on ait $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$ et $x^3+x^2+x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2x+x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ car le trinôme x^2+x+1 a un discriminant négatif donc n'admet pas de racines.
   D'où $\mathscr{D}_g = [-\dfrac{1}{2}; 0[\cup]0; +\infty[$

3. $h(x) = e^x \ln(2x+3)$

   pour que h soit définie, il faut que l'on ait $2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$ donc $\mathscr{D}_h =]-\dfrac{3}{2}; +\infty[$

4. $i(x) = \dfrac{\ln(x^3+1)}{4-x^2}$

   Il faut d'une part que le contenu du logarithme soit strictement positif et d'autre part que le dénominateur ne s'annule pas.
   Or $x^3+1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ car la fonction cubique est strictement croissant sur $\mathbb{R}$
   par ailleurs, $4-x^2 = (2-x)(2+x)$ donc $4-x^2 = 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$
   donc on écarte en plus la valeur 2 (le logarithme n'est pas défini pour $x = -2$),
   donc $\mathscr{D}_i =]-1, 2[\cup]2+\infty[$

5. $j(x) = \dfrac{1}{2x - \sqrt{x^2+x-2}}$

   Pour que j soit définie il faut d'une part que $x^2+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$ car ce trinôme admet 1 et -2 pour racines et que l'on a $a = 1 > 0$
   et d'autre part que $2x - \sqrt{x^2+x-2} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2} \neq 2x \Rightarrow x \geq 0$ et $x^2+x-2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x + 2 \neq 0$ ce qui est toujours le cas car le discriminant de ce trinôme est négatif
   donc $\mathscr{D}_j =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

6. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x^2+5x+2}$

   Pour que k soit définie il faut $x^2+1 \geq 0$ ce qui est toujours le cas puisqu'un carré est toujours positif et $3x^2+5x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq -\dfrac{2}{3}$
   donc $\mathscr{D}_k = \mathbb{R}\backslash\{-1; -\dfrac{2}{3}\}$

7. $l(x) = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2-1}$

   Pour que l soit définie, il faut que $x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 0$ et que $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$ donc $\mathscr{D}_l =]-\infty; -1[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

Objectif 2 : savoir étudier la parité d'une fonction

Exercice 2

Après avoir déterminé le domaine de définition, étudier la parité, puis le signe, des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

• Comme un carré est toujours positif, pour tout réel x, $1+x^2 \neq 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} = f(x)$ car la fonction carrée est paire.
Comme de plus $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, on en déduit que f est paire sur $\mathbb{R}$.
• Comme un carré est toujours positif, pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ et $1+x^2 \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux nombres positifs et $f(x)$ s'annule uniquement en 0.

2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

• Pour que f soit définie, il faut que $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1;1[$ car $\dfrac{1+x}{1-x}$ est du même signe que le polynôme $(1+x)(1-x)$ dont les racines sont 1 et -1 et pour lequel on a $a = 1 < 0$
Donc $\mathscr{D}_f =]-1;1[$ qui est symétrique par rapport à 0.
• Pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$
car pour tout réel $X > 0, \ln X = -\ln \dfrac{1}{X}$
• Bilan : comme $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que pour tout $x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = -f(x)$, la fonction f est impaire sur son ensemble de définition.

Pour le signe de $f(x)$: $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x-(1+x)}{1+x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{1+x} > 0$. Or pour tout $x \in \mathscr{D}_f, 1+x > 0$ donc $\dfrac{-2x}{1+x}$ est du signe de $-2x$. Au final, on en déduit que
$f(x) > 0$ sur $]-1;0[$, $f(x) = 0$ uniquement pour $x = 0$ et $f(x) < 0$ sur $]0;1[$.

3. $h(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$

• Pour que g soit définie, il faut $|x|+1 \neq 0$ ce qui est toujours le cas car la fonction valeur absolue est positive sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$
• Pour tout réel x, $g(-x) = \dfrac{-x}{|-x|+1} = -\dfrac{x}{|x|+1} = -g(x)$ car la fonction valeur absolue est paire
• Bilan : comme $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que pour tout $x \in \mathscr{D}_g, g(-x) = -g(x)$, la fonction g est impaire sur son ensemble de définition.

Pour le signe de $g(x)$: la fonction valeur absolue étant positive sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $x, |x|+1 > 0$ donc $g(x)$ est du signe de x, à savoir : strictement négative sur R_-^* ; strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et nul uniquement en 0

Objectif 3 : savoir déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Exercice 3 Après avoir déterminé l'ensemble de définition puis justifié la dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leurs dérivées.

1. $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$

• La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1;+\infty[$
donc f est définie sur $]-1;+\infty[$ comme somme de fonctions bien définies
• La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables
donc f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables
et pour tout réel $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (on utilise la formule : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$)

2. $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$

• Pour tout x réel, $e^x > 0$ donc $1 + e^x \neq 0$: g est donc définie sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions bien définies sur $\mathbb{R}$
• La fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient bien défini de fonctions dérivables
donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel x,
$g'(x) = \dfrac{1 \times (1+e^x) - 1 \times (1+x)}{(1+e^x)^2} - 1 = \dfrac{e^x - x}{(1+e^x)^2} - 1$. (on utilise la formule : $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$)

3. $h(x) = \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$

• Pour que h soit définie, il faut que l'on ait $2x - \dfrac{3}{x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 - 3}{x} > 0$.

Comme les racines du polynôme $2x^2 - 3$ sont $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$2x^2-3$		+	0	-		-	0	+	
$\dfrac{2x^2-3}{x}$		-	0	+	0	-	0	+	

Donc : $\mathscr{D}h =]-\sqrt{\dfrac{3}{2}};0[\cup]\sqrt{\dfrac{3}{2}};+\infty[$
• h est dérivable sur $\mathscr{D}_h$ comme composée de fonctions dérivables, de la forme $h = \ln u$
avec $u(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$ et donc $u'(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2}$
donc $\forall x \in \mathscr{D}_h, h'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2+\frac{3}{x^2}}{2x - \frac{3}{x}} = \dfrac{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2x-\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{2x^2+3}{2x^3-3x}$

4. $i(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$

• Pour que i soit définie, il faut $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$ donc $\mathscr{D}_i = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$
• i est dérivable sur $\mathscr{D}_i$ comme quotient bien défini de fonctions dérivables
et $\forall x \in \mathscr{D}_i, i'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - e^{2x}2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}$
(On utilise la formule du quotient $\left(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}\right.$ avec $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x^2 - 1$,
donc $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = 2x$)

Objectif 4 : savoir étudier les variations d'une fonction

Exercice 4 Pour $x \in [-2, 3[$, on définit la fonction f par $f(x) = x^3 - 3x + 1$

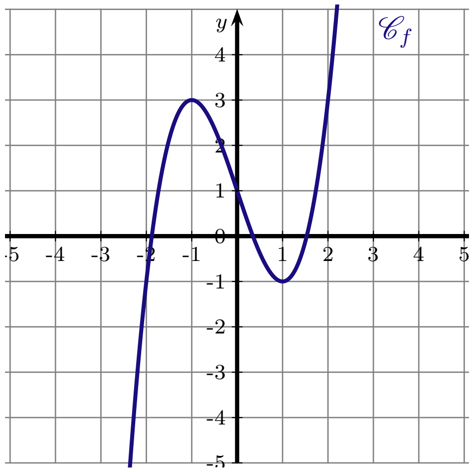
1. Dresser le tableau de variations de f, et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$

f est dérivable sur $[-2;3[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel $x \in [-2;3[$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

Ce polynôme du second degré admet donc 1 et -1 pour racines et comme $a = 3 > 0$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Et voici l'allure de la courbe représentative de f :



2. f admet-elle un maximum ? Si oui, précisez sa valeur, et le ou les valeurs en le(s)quels il est atteint.

f n'admet pas de maximum. Elle admet par contre un maximum local qui est 3 atteint en $x = -1$.

3. f admet-elle un minimum ? Si oui, précisez sa valeur, et le ou les valeurs en le(s)quels il est atteint.

f n'admet pas de minimum. Elle admet par contre un minimum local qui est -1 atteint en $x = 1$.

Exercice 5 Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f, et étudier f, avec :

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $x^2 + 1 \neq 0$

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = f(x)$ car la fonction carrée est paire sur $\mathbb{R}$. Donc f est paire.

f est dérivable sur R comme quotient bien définie de fonctions dérivables.

Et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

Comme un carré est toujours positif, $f'(x)$ est du signe du trinôme $-x^2+1$ ayant 1 et -1 pour racines et pour lequel on a $a = -1 < 0$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	
f	$\searrow$		$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

2. $f(x)=x\sqrt{x}$

f est définie sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions définies sur R_+
$\mathbb{R}_+$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, f ne peut pas être paire ni impaire.
f est dérivable sur ${\mathbb{R}_+}^*$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
En fait, f est peut-être dérivable en 0 mais pour le savoir, il faut faire une étude spécifique de sa dérivabilité en 0 en regardant si le taux de variation admet ou non une limite fini en 0.
Et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\times 1=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
Comme la fonction racine carrée est toujours positive, $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 6 Soit f la fonction définie par : $f(x)=e^{\sqrt{1-x^2}}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f. f est-elle paire ou impaire sur $\mathscr{D}_f$?

• Pour que f soit définie, il faut : $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x+1)\geq 0$ donc $\mathscr{D}_f=[-1;1]$ car le polynôme $1-x^2$ est de signe positif entre ses racines ($a=-1<0$)
• $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel $x\in\mathscr{D}_f$, $f(-x)=f(x)$: la fonction f est donc paire sur $\mathscr{D}_f$

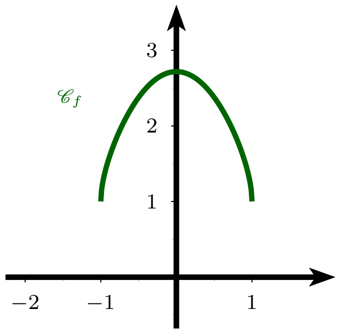
2. Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$, et déterminer $f'(x)$ pour $x\in]-1,1[$

Sur $]-1;1[$, $1-x^2>0$ donc $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur cet intervalle comme fonction composée et $f:x\mapsto e^{\sqrt{1-x^2}}$ l'est aussi comme fonction composée également
Et pour tout réel $x\in]-1;1[$, $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}$
(on utilise les formules : $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(e^u)'=u'e^u$)

3. Etudier les variations de f. f admet-elle un minimum ? Un maximum ? Si oui, lesquels ?

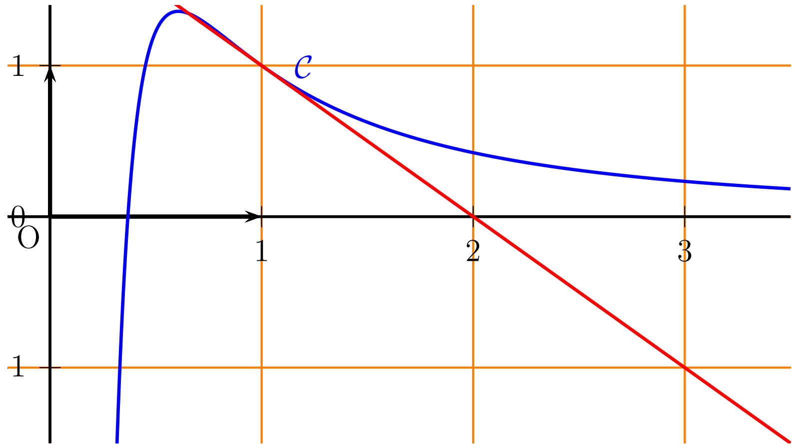
Comme les fonctions racines carrées et exponentielles sont positives, $f'(x)$ est du signe de $-x$ donc f est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$
f admet donc un maximum en 0 qui vaut $f(0)=e$ et un minimum soit en 1 soit en -1.
Pour le savoir, déterminons ces deux images : $f(1)=f(-1)=1$.
Donc f admet pour minimum 1 atteint en -1 et en 1

4. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$



Exercice 7 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous.



1. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow > e^{-1}$.

Donc f est strictement négative sur $]0; \dfrac{1}{e}[$, nulle uniquement pour $x = \dfrac{1}{e}$ et strictement positive sur $]\dfrac{1}{e}; +\infty[$.

2. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ et déterminer la valeur exacte du minimum de f sur $]0; +\infty[$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient bien défini de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln x) \times 2x}{x^4} = \dfrac{x(1 - 2(1+\ln x))}{x^4} = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^3}$.

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2\ln x$.

Or : $-1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow -2\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$.

f est donc croissante sur $]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}]$ et décroissante sur $[\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$

Elle admet donc $f(\dfrac{1}{\sqrt{e}}) = \dfrac{1 + \ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{(\frac{1}{\sqrt{e}})^2} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \dfrac{e}{2}$

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 puis la tracer sur le graphique.

$f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ et $f'(1) = \dfrac{-1}{1^3} = -1$ donc une équation de T est : $y = -1 \times (x-1) + 1$ soit $y = -x + 2$

Objectif 5 : savoir étudier une fonction puissance

Exercice 8 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

   Cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x - x\ln\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x - x \times \frac{1}{2}\ln x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0$ ou $\ln x = 0$ ou $1 - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$

   Et donc : $\mathscr{S} = \{1; 4\}$

2. Après avoir déterminé l'ensemble de définition puis justifié la dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leurs dérivées :

   a. $f(x) = x^\pi$

   D'après le cours, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$

   b. $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$

   • Comme très souvent avec les puissances quelconques, il faut revenir à la définition et utiliser l'écriture exponentielle : $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$ qui est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur ce même intervalle

   Et donc g est définie et dérivable sur $\mathscr{D}_g =]0;+\infty[$ comme composée de fonctions

   • et $\forall x \in \mathscr{D}_g, g'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ et on utilise la formule du produit pour dériver u :

   $u'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))$

   finalement $g'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 9 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m(x) = x^m \ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_m$ la représentation graphique de f_m dans un repère orthonormé.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Justifier que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dériver f_m.

   Soit $m \in \mathbb{R}$, alors f_m est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto x^m$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit donc d'un produit de fonctions dérivables.

   On va donc utiliser la formule du produit avec $u(x) = x^m$ donc $u'(x) = mx^{m-1}$ (d'après le cours) et $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$

   donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_m'(x) = mx^{m-1}\ln(x) + x^m \times \frac{1}{x} = mx^{m-1}\ln(x) + x^{m-1} = x^{m-1}(m\ln(x) + 1)$

2. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ admettent la même tangente au point d'abscisse 1.

   Soit $m \in \mathbb{R}$, par définition la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f_m'(1)(x-1) + f_m(1)$; or $f_m(1) = 1^m\ln(1) = 1 \times 0 = 0$ et $f_m'(1) = 1^{m-1}(m\ln(1) + 1) = 1 \times (0 + 1) = 1$

   donc la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 1(x-1) + 0$ i.e. $y = x - 1$

   la tangente est donc toujours la même, indépendamment de la valeur de m.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^{\ln(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

On revient à la définition pour y voir plus clair : $x^{\ln(x)}$ est défini par $x^{\ln(x)} = \exp(\ln(x)\ln(x)) = e^{(\ln x)^2}$ donc $f(x)$ est défini dès lors que $\ln(x)$ est défini, i.e. sur $]0, +\infty[= \mathscr{D}_f$

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$, et déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Avec l'écriture $f(x) = e^{(\ln x)^2}$, on peut dire que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ puisqu'il s'agit d'une composition de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition.
Et en écrivant $f(x) = e^{u(x)}$, on trouve $\forall x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
et $u(x) = (\ln x)^2$ que l'on peut écrire $u(x) = v(x)^2$
alors $u'(x) = 2v'(x)v(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$
donc $\forall x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}e^{(\ln x)^2} = \dfrac{2\ln(x)x^{\ln(x)}}{x} = 2\ln(x)x^{\ln(x)-1}$

3. Etudier les variations de f.

En utilisant la dernière écriture de $f'(x)$, comme (pour $x > 0$), $x^{\ln(x)-1}$ est strictement positif (c'est le résultat d'une exponentielle), alors $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$.
De fait $f'(x)$ est strictement négatif sur $]0, 1[$, nul en 1 et strictement positif sur $]1, +\infty[$, on peut donc dresser le tableau de variations (sachant que $f(1) = e^{(\ln 1)^2} = e^0 = 1$) :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Une équation de cette tangente est $y = f'(e)(x - e) + f(e)$
or $f(e) = e^{\ln(e)} = e^1 = e$ et $f'(e) = 2\ln(e)e^{\ln(e)-1} = 2 \times 1 \times e^0 = 2$
donc une équation de la tangente est $y = 2(x - e) + e = 2x - e$

5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

On utilise les informations précédentes (tableau de variations et la tangente). Il nous manque les limites ($+\infty$ en 0 et $+\infty$), on peut remarquer que $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{(\ln(e^{-1})} = (e^{-1})^{-1} = e$