Objectif 1 : savoir utiliser les propriétés des polynômes du second degré

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x+3)(2x-5)(6x+2)=0$

$(x+3)(2x-5)(6x+2)=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $2x-5=0$ ou $6x+2=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=\dfrac{5}{2}$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$

2. $x^2-12=0$

$x^2-12=0 \Leftrightarrow x^2=12 \Leftrightarrow x=-\sqrt{12}$ ou $x=\sqrt{12}$

3. $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{2}{x+1}$

Sur $\mathbb{R}\setminus\{4;-1\}$, $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow 3(x+1)=2(x-4) \Leftrightarrow 3x+3=2x-8 \Leftrightarrow x=-11$

4. $\dfrac{2x+1}{x-3}=-\dfrac{2x-1}{x+3}$

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$, alors $\dfrac{2x+1}{x-3}=-\dfrac{2x-1}{x+3} \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\dfrac{2x+1}{x-3}=-(x-3)(x+3)\dfrac{2x-1}{x+3}$
$\Leftrightarrow (x+3)(2x+1)=-(x-3)(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2+6x+x+3=-(2x^2-6x-x+3)$
$\Leftrightarrow 2x^2+7x+3=-2x^2+7x-3 \Leftrightarrow 4x^2+6=0$
or $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}, 4x^2+6>0$ donc l'équation n'admet aucune solution
Nota Bene : on peut aussi résoudre l'équation en regroupant les fractions et en les réduisant au même dénominateur.

5. $x^2+x+1=0$
Cette équation n'admet aucune solution car son discriminant est strictement négatif : $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$

6. $x^2-x+1=0$

Cette équation n'admet aucune solution car son discriminant est strictement négatif :
$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3$; c'est d'ailleurs le même discriminant que précédemment

7. $\dfrac{x+1}{x-1}=x$

avec $x\neq1$, $\dfrac{x+1}{x-1}=x \Leftrightarrow (x-1)\dfrac{x+1}{x-1}=(x-1)x \Leftrightarrow x+1=(x-1)x \Leftrightarrow x+1=x^2-x$
$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$, nous sommes donc ramenés à une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8$, cette équation admet donc deux racines,
$x_1=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ car $\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{4}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

8. $x^2-2x-3=0$

on peut remarquer que -1 est une racine évidente de cette équation.
Or le produit des deux racines vaut $\dfrac{c}{a}=-3$, donc $x_2=3$

9. $x^2-x-1=0$
le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$
Cette équation admet donc deux racines, $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

10. $3x^2+x-2=0$

on peut remarquer que -1 est une racine évidente de cette équation
Or le produit des deux racines vaut $\dfrac{c}{a}=-\dfrac{2}{3}$, donc $x_2=\dfrac{2}{3}$

11. $-x^2-5x+1=0$

le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 29$
Cette équation admet donc deux racines, $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{29}}{-2} = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$

12. $\dfrac{1}{x} = x - 1$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} = x - 1 \Leftrightarrow 1 = x(x-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$, nous sommes donc ramenés à l'équation du second degré **9**

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dépendant du paramètre réel m : $\dfrac{3x-m}{x-1} = m-2$

L'équation n'est pas définie pour $x = 1$, on prend donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors
$\dfrac{3x-m}{x-1} = m-2 \Leftrightarrow 3x - m = (m-2)(x-1) \Leftrightarrow 3x - m = (m-2)x - (m-2) \Leftrightarrow 3x - (m-2)x = 2 - m + m \Leftrightarrow$ $(5-m)x = 2$
donc si le paramètre m vaut 5 alors l'équation est équivalente à $0 = 2$ ce qui n'est jamais vérifié, donc elle n'admet aucune solution
et si $m \neq 5$, alors l'équation admet pour solution $x = \dfrac{2}{5-m}$
mais il faut vérifier qu'on ne tombe pas sur la valeur interdite qui est 1
or $\dfrac{2}{5-m} = 1 \Leftrightarrow 2 = 5 - m \Leftrightarrow m = 3$ donc cette valeur n'est pas possible
donc en résumé, si $m = 3$ ou $m = 5$, l'équation n'admet aucune solution et sinon l'unique solution est $x = \dfrac{2}{5-m}$

Exercice 3 Simplifier l'expression $f(x)$ suivante (on suppose qu'elle est bien définie).

1. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x + 4}{(x-1)(4x+12)} = \dfrac{4(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)(4x+12)} = \dfrac{4(x-1)^2}{(x-1)4(x+3)} = \dfrac{x-1}{x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{2x}{(x+1)(x-3)} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{2x}{(x+1)(x-3)} - \dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-3)}$

Exercice 4 Déterminer l'ensemble E suivant : $E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x - 6 \leqslant 0\}$

Il s'agit simplement de résoudre une inéquation avec un trinôme du second degré
or $x^2 + x - 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ donc il admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = 2$
donc $x^2 + x - 6 \leqslant 0$ entre les racines (car $a = 1 > 0$), i.e. sur $[-3, 2]$, donc $E = [-3, 2]$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x}$
   tout d'abord, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$
   et pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 2$, $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2x(x-2)} - \dfrac{2x}{2x(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$
   $\dfrac{-x-2}{2x(x-2)} \geq 0$. On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	-		-		-	
$2x(x-2)$		$+$		$+$	0	-	0	$+$	
$\dfrac{-x-2}{2x(x-2)}$		$+$	0	-	$\Vert$	$+$	$\Vert$	-	

Et donc $S =]-\infty;-2] \cup]0;2[$

2. $\dfrac{2x+1}{1+x} \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x}$

tout d'abord, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$

et pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{2x+1}{1+x} \leqslant \dfrac{3x-2}{1+x} \Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{1+x} - \dfrac{2x+1}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{1+x} \geq 0$

Ce quotient est du même signe que le polynôme $(x-3)(x+1)$ pour lequel on a $a = 1 > 0$

Et donc $S =]-\infty;-1[\cup [3;+\infty[$

3. $x - \dfrac{2}{x} > 1$

tout d'abord, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$

et pour tout $x \neq 0$, $x - \dfrac{2}{x} > 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{2}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2-x}{x} > 0$

Or le polynôme $x^2 - x - 2$ admet -1 et 2 pour racines.

Et comme $a = 1 > 0$, on obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	-		-	0	$+$	
x		-		-	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-x-2}{x}$		-	$\Vert$	$+$	0	-	$\Vert$	$+$	

Et donc $S =]-1;0[\cup]2;+\infty[$

4. $-4x + 7 \leqslant -6$

$-4x + 7 \leqslant -6 \Leftrightarrow -4x \leq -12 \Leftrightarrow x \geq 3$ d'où $S = [3;+\infty[$

5. $x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$

Le trinôme $x^2 - 3x - 10$ admet -2 et 5 pour racines

et comme $a = 1 > 0$, on obtient : $S =]-\infty;-2] \cup [5;+\infty[$

6. $x^3 + 5x \leqslant 6x \Leftrightarrow x^3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \leq 0$

On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		-		-	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	-		-	0	$+$	
$x(x-1)(x+1)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	

Et donc $S =]-\infty,-1] \cup [0,1]$

Objectif 2 : savoir utiliser les propriétés des fonctions valeur absolue, inverse, racine carrée, et partie entière

Exercice 6 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Déterminer l'expression $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ suivant les différentes valeurs possibles de x.

$x^2 - 5x + 6$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 2 et 3.

Comme $a = 1 > 0$, il est de signe positif à l'extérieur des racines et de signe négatif à l'intérieur.

Donc : $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sur $]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$ et $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ sur $[2;3]$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations, d'inconnue x réelle :

a. $|x-5|<6 \Leftrightarrow -6<x-5<6 \Leftrightarrow -1<x<11$

b. $|x-3| \geqslant 4 \Leftrightarrow x-3 \geq 4$ ou $x-3 \leq -4 \Leftrightarrow x \geq 7$ ou $x \leq -1$

c. $|7-3x| \leqslant 5 \Leftrightarrow |3x-7| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3x-7 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq 3x \leq 12 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \leq x \leq 4$

d. $|x+4| \leqslant 5-3x$

déjà, il faut que l'on ait $5-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{3}$ sinon cette inéquation n'admet pas de solution.

et si $x \leq \dfrac{5}{3}$, alors : $|x+4| \leqslant 5-3x \Leftrightarrow -5+3x \leq x+4 \leqslant 5-3x \Leftrightarrow 2x \leq 9$ et $4x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{9}{2}$ et $x \leq \dfrac{1}{4}$.

Donc au bilan l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]-\infty; \dfrac{1}{4}]$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1| = x-4$

déjà, il faut que l'on ait $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ sinon cette équation n'admet pas de solution.

et si $x \geq 4$, alors : $|2x+1| = x-4 \Leftrightarrow 2x+1 = -x+4$ ou $2x+1 = x-4 \Leftrightarrow 3x = 5$ ou $x = -5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ ou $x = -5$ mais aucun de ces deux nombres n'est supérieur à 4

Donc au final l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \emptyset$

4. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\dfrac{3}{|x|+2} \geqslant 1$

Pour tout $x \in [-1,1], |x| \leq 1 \Rightarrow 0 < |x|+2 \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{|x|+2} \geq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3}{|x|+2} \geq 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 7 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} < 4$? et de l'inéquation $\dfrac{1}{x} < -4$?

si $x > 0$: $\dfrac{1}{x} < 4 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

et si $x < 0$, on a : $\dfrac{1}{x} < 0$ donc $\dfrac{1}{x} < 4$

d'où $S =]-\infty; 0[\cup]\dfrac{1}{4}; +\infty[$

pour la seconde inéquation, les nombres x solutions de cette inéquation sont forcément négatifs et la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, $\dfrac{1}{x} < -4 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{4}$ donc $S =]-\dfrac{1}{4}; 0[$

2. Montrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 8 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Simplifier les écritures des nombres suivants :

$A = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} = \dfrac{(\sqrt{3}+2)^2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + \dfrac{(\sqrt{3}-2)^2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \dfrac{3+4\sqrt{3}+4+3-4\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}^2-4} = \dfrac{14}{-1} = -14$;

$B = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2^2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}^2} =$

$\sqrt{4-(2+\sqrt{2})} = \sqrt{4-2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$C = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2-(3-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}-5$ en effet $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$

donc $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ car $\sqrt{5} \geqslant 2$ et $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 3-\sqrt{5}$ car $\sqrt{5} \leqslant 3$

2. Exprimer $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ en fonction de $\sqrt{2}$

$\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

3. Montrer que pour tout réel t, on a : $\qquad \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$

En tâtonnant un peu on observe que $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2 \Rightarrow \sqrt{1+t^4}^2 \leqslant (1+t^2)^2$ par croissance de la fonction carré, ce qui revient à $1+t^4 \leqslant 1+2t^2+t^4$, qui est toujours vérifiée car $t^2 \geqslant 0$ et on va donc utiliser cette dernière inégalité comme point de départ :

soit $t \in \mathbb{R}$ alors $0 \leqslant 2t^2$ donc $1+t^4 \leqslant 1+2t^2+t^4$, i.e. $1+t^4 \leqslant (1+t^2)^2$ (identité remarquable)
nous avons affaire à des nombres positifs, on peut donc appliquer la racine carrée qui est une fonction croissante, donc $\sqrt{1+t^4}^2 \leqslant \sqrt{(1+t^2)^2}$ et donc $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$
car $\sqrt{(1+t^2)^2} = |1+t^2| = 1+t^2$ (car $1+t^2 \geqslant 0$)

4. Préciser pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ est définie, et simplifier cette expression

a. $f(x) = \sqrt{x^4-6x^2+9}$

Pour que $f(x)$ existe, il faut $x^4-6x^2+9 \geq 0$. Or pour tout x réel, $x^4-6x^2+9 = (x^2-3)^2 \geq 0$
donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{(x^2-3)^2} = |x^2-3$
donc $f(x) = x^2-3$ si $x \in]-\infty;\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};+\infty[$ et $f(x) = -x^2+3$ sinon

b. $f(x) = \sqrt{x-1} - \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x-1}}$

pour que $f(x)$ existe, il faut $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ et pour tout $x \geq 1$,
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}\times x\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}} - \dfrac{(x-1)(x+1)}{x\sqrt{x-1}} = \dfrac{x(x-1)-(x-1)(x+1)}{x\sqrt{x-1}} = \dfrac{(x-1)(x-(x+1))}{x\sqrt{x-1}} = \dfrac{-(x-1)}{x\sqrt{x-1}} = \dfrac{-\sqrt{x-1}}{x}$
Indication : penser aux identités remarquables !

Exercice 9 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Montrer que pour tout $x \in [1,3[$, on a : $\qquad -2 \leqslant -\dfrac{2}{x^2} < -\dfrac{2}{9}$

pour tout $x \in [1,3[$, on a : $1 \leq x^2 < 9$ car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $\dfrac{1}{9} < \dfrac{1}{x^2} \leq 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
et comme $-2 < 0$, on en déduit l'inégalité demandée

2. Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, on a : $\qquad \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \dfrac{3}{2}$

pour tout $x \in [-3,2[$, on a : $-4 \leq x-1 \leq 1$ donc $0 \leq (x-1)^2 \leq 16$ car la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$
d'où $2 \leq (x-1)^2+2 \leq 18$ et alors $\dfrac{1}{18} \leq \dfrac{1}{(x-1)^2+2} \leq \dfrac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
et comme $3 > 0$, on en déduit l'inégalité demandée

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $t^2+1 \geq t^2$ donc $\sqrt{t^2+1} \geq \sqrt{t^2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \dfrac{1}{t}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{t^2} = t$

4. Montrer que pour tout $x \in [1,4]$, on a : $\qquad \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}+x-1} \leqslant 1$

pour tout $x \in [1,4], 1 \leq \sqrt{x} \leq 2$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $2 \leq \sqrt{x}+x \leq 6$ et alors $1 \leq \sqrt{x}+x-1 \leq 4$
on en déduit l'inégalité demandée par application de la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

5. On suppose que $\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ 1 \leqslant b \leqslant 2 \end{cases}$. Démontrer que : $2 \leqslant a^2 - \dfrac{2}{b} \leqslant 8$

D'une part : comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+, 4 \leq a^2 \leq 9$.

D'autre part, comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{b} \leq 1$ donc $-2 \leq \dfrac{-2}{b} \leq -1$

Par comme de ces deux inégalités, on en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1$

Par définition de la fonction partie entière, cela revient à démontrer que pour tout entier n, $4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2$. Or : $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = n + 2\sqrt{n(n+1)} + n + 1 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}$

De plus pour tout entier n, $n^2 \leq n(n+1) < (n+1)^2$ donc par croissance de la fonction racine carrée, $n \leq \sqrt{n(n+1)} < n+1$

On obtient alors : $2n+1+2n \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 2n+1+2(n+1) \Leftrightarrow 4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+3$

Il reste alors à prouver que pour tout entier n, $2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n(n+1) < (2n+1)^2$ car les expressions manipulées sont positives $\Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 1 > 0$.

On a donc bien pour tout entier n, $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n + 2$.

Exercice 11 Résoudre les équations et inéquations d'inconnue x réelle suivantes :

1. $|x-2| = 1$

$|x-2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$

2. $|2x+1| \geqslant 7$

$|2x+1| \geqslant 7 \Leftrightarrow 2x+1 \leq 7$ ou $2x+1 \geq -7 \Leftrightarrow x \leq 6$ ou $x \geq -4$ donc $S =]-\infty; -4] \cup [6; +\infty[$

3. $|x+1| + |x+2| = 1$

Pour résoudre cette équation, on est obligé de procéder par disjonction de cas.

• Si $x < -2$ alors $|x+1| + |x+2| = -x - 1 - x - 2 = -2x - 3$
et alors l'équation équivaut à $-2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2$

• Si $-2 \leq x \leq -1$ alors $|x+1| + |x+2| = -x - 1 + x + 2 = 1$
et alors l'équation est vérifiée pour tous les réels x tels que $-2 \leq x \leq -1$

• Si $x > -1$ alors $|x+1| + |x+2| = x + 1 + x + 2 = 2x + 3$
et alors l'équation équivaut à $2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1$

• pour conclure : $S = [-2; -1]$

4. $\lfloor x^2 + x + 1 \rfloor = 2$

Par définition de la fonction partie entière, $\lfloor x^2 + x + 1 \rfloor = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x^2 + x + 1 < 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 \geq 0$ et $x^2 + x - 2 < 0$.

Or le polynôme x^2+x-1 a pour racines $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et donc on a $x^2+x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

De même le polynôme $x^2 + x - 2$ a pour racine évidente 1 et son autre racine est -2 donc il est de signe strictement négatif sur $]-2; 1[$.

Pour conclure : $S =]-2; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1[$.

5. $\sqrt{x} + 1 = x$

On peut raisonner par analyse-synthèse (en isolant la racine puis en élevant au carré) ou par équivalence en remarquant que $\sqrt{x}+1 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 1$ et donc si x est solution alors forcément $x - 1 \geqslant 0$ (puisque cela vaut $\sqrt{x}$), i.e. $x \geqslant 1$. On va donc se limiter à $x \geqslant 1$

soit $x \geqslant 1$, alors $\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 1 \Leftrightarrow x = (x-1)^2$

la dernière équivalence est valide car on peut faire le retour en arrière : en effet, $x \geqslant 0$ donc on peut prendre sa racine carrée et de plus $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x - 1$ car $x \geqslant 1$ $(x - 1 \geqslant 0)$

donc $\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

nous sommes ramenés à l'étude d'un trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$ donc

x^2-3x+1 admet deux racines qui valent $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
or $\sqrt{5}\geqslant\sqrt{4}\geqslant 2$ donc $-\sqrt{5}\leqslant -2$ donc $3-\sqrt{5}\leqslant 1$ et donc $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1$
donc x_1 ne peut pas être solution, par contre $x_2\geqslant 1$
finalement $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

6. $x=\sqrt{x}+2$
La résolution de cette équation se faite de la même manière que précédemment
On montre qu'il faut déterminer les racines du polynôme x^2-5x+4 qui sont 1 et 4
Or 1 n'est pas solution de l'équation alors que 4 l'est donc $S=\{4\}$

Objectif 3 : savoir utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien

Exercice 12 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Exprimer $\ln(4\sqrt{2})$ en fonction de $\ln 2$.
$\ln(4\sqrt{2})=\ln 4+\ln\sqrt{2}=\ln 2^2+\dfrac{1}{2}\ln 2=2\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 2=\dfrac{5}{2}\ln 2$

2. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, on a : $\quad 0\leqslant\dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)}\leqslant\dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$

On remarque la similitude entre les deux termes de l'inégalité et on comprend que l'on doit comparer $\ln(1+t^2)$ et $\ln(2)$
soit $t\in[0;1]$ alors $0\leqslant t^2\leqslant 1$ par croissance de la fonction carré
donc $1\leqslant 1+t^2\leqslant 2$ et donc $\ln(1)\leqslant\ln(1+t^2)\leqslant\ln(2)$ par croissance de la fonction ln
donc $0\geqslant -\ln(1+t^2)\geqslant -\ln(2)$ et donc $1\geqslant 1-\ln(1+t^2)\geqslant 1-\ln(2)$
de plus $1-\ln(2)\geqslant 0$ (car $2\leqslant e$ et de fait $\ln(2)\leqslant\ln(e)=1$ par croissance de ln)
cette inégalité ne comporte donc que des nombres positifs et lui on applique la fonction inverse qui est décroissante sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'obtenir $1\leqslant\dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)}\leqslant\dfrac{1}{1-\ln(2)}$ et donc en multipliant tous les termes par $\ln(1+t^2)$ qui est positif on obtient :
$\ln(1+t^2)\leqslant\dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)}\leqslant\dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$ et de fait $0\leqslant\dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)}\leqslant\dfrac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}$ car $\ln(1+t^2)\geqslant 0$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^4+5x^2-2=0$
Le polynôme $3X^2+5X-2$ a pour racines -2 et $\dfrac{1}{3}$ et se factorise donc sous la forme $3(X+2)(X-\dfrac{1}{3})$
et donc pour tout x réel $3x^4+5x^2-2=3(x^2+2)(x^2-\dfrac{1}{3})$
d'où $3x^4+5x^2-2=0\Leftrightarrow 3(x^2+2)(x^2-\dfrac{1}{3})=0\Leftrightarrow x^2+2=0$ ce qui est impossible car un carré est toujours positif ou $x^2-\dfrac{1}{3}=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$
donc $S=\{-\sqrt{\dfrac{1}{3}};\sqrt{\dfrac{1}{3}}\}$

2. $(\ln x)^2+3\ln x+2=0$
pour commencer cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
le polynôme X^2+3X+2 admet -1 et -2 pour racines donc il se factorise sous la forme $(X+1)(X+2)$
et alors pour tout $x>0$, $(\ln x)^2+3\ln x+2=0\Leftrightarrow(\ln x+2)(\ln x+1)=0\Leftrightarrow\ln x=-2$ ou $\ln x=-0\Leftrightarrow$ $x=e^{-2}$ ou $x=e^{-1}$
On a donc $S=\{\dfrac{1}{e^2};\dfrac{1}{e}\}$

3. $e^x+e^{-x}=2 \Leftrightarrow e^x(e^x+e^{-x})=2e^x$
(les deux équations sont bien équivalentes, on peut revenir en arrière en multipliant par e^{-x})
donc $e^x+e^{-x}=2 \Leftrightarrow e^{2x}+e^0=2e^x \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+1=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x+1=0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2=0$
on a reconnu une identité remarquable, puis $(e^x-1)^2=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Nota Bene : on peut aussi écrire $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ et effectuer une réduction au même dénominateur.

4. $\ln(3x)+\ln(x-1)=\ln 2+2\ln 3$
$\ln(3x)+\ln(x-1)=\ln 2+2\ln 3 \Leftrightarrow \ln(3x(x-1))=\ln 2+\ln 3^2 \Leftrightarrow \ln(3x(x-1))=\ln(2\times 3^2) \Leftrightarrow$
$3x(x-1)=18 \Leftrightarrow 3x^2-3x=18 \Leftrightarrow 3x^2-3x-18=0$
Ce trinôme admet -2 et 3 pour racines
Au final, on obtient : $S=\{3\}$

Exercice 14

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue x réelle suivantes :

1. $|\ln(x)|<1 \Leftrightarrow -1<\ln(x)<1 \Leftrightarrow e^{-1}<e^{\ln(x)}<e^1$
la dernière équivalence est valide car les fonctions exponentielle et logarithme (pour le retour) sont strictement croissantes. or $e^{\ln(x)}=x$ donc $|\ln(x)|<1 \Leftrightarrow e^{-1}<x<e^1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{e}<x<e^1\right)$

2. $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2-4e^2)-\ln(3x)<1$
on peut préciser que cette équation n'est définie que lorsque $x>0$ (pour la bonne définition de $\ln(3x)$)
et lorsque $x^2-4e^2>0 \Leftrightarrow x^2>4e^2 \Leftrightarrow |x|>2e$ (pour la bonne définition de $\ln(x^2-4e^2)$)
finalement l'équation est définie lorsque $x>2e$.
Soit $x>2e$, alors : $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x^2-4e^2}{3x}\right)<1$
car $\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ lorsque $a>0$ et $b>0$
donc $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \Leftrightarrow \exp\left(\ln\left(\dfrac{x^2-4e^2}{3x}\right)\right)<e^1$
la dernière équivalence est valide car les fonctions exponentielle et logarithme (pour le retour) sont strictement croissantes
donc $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4e^2}{3x}<e$ car $e^{\ln(x)}=x$
donc $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \Leftrightarrow x^2-4e^2<e\times 3x$ car $3x>0$
donc $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \Leftrightarrow x^2-3ex-4e^2<0$
nous sommes donc ramenés à l'étude d'un trinôme dont le discriminant vaut :
$\Delta=(-3e)^2-4\times 1\times(-4e^2)=9e^2+16e^2=25e^2$
comme $a>0$, ce trinôme est négatif à l'extérieur des racines qui sont $x_1=\dfrac{3e-\sqrt{25e^2}}{2}=\dfrac{-2e}{2}=-e$
et $x_2=\dfrac{3e+\sqrt{25e^2}}{2}=\dfrac{8e}{2}=4e$
finalement $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \Leftrightarrow x\in]-\infty,-e[\cup]4e,+\infty[$

3. $e^{2x}+8\geqslant 6e^x \Leftrightarrow e^{2x}-6e^x+8\geqslant 0 \Leftrightarrow (e^x)^2-6e^x+8\geqslant 0 \Leftrightarrow (e^x-2)(e^x-4)\geqslant 0$
on a utilisé ici que 2 et 4 sont les racines de x^2-6x+8
on conclut ensuite avec un tableau de signe sachant que :
$e^x-2\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant \ln(2)$ (de même $e^x-2\leqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant \ln(2)$)

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$\ln(4)$		$+\infty$
e^x-2		-	0	+		+	
e^x-4		-		-	0	+	
$(e^x-2)(e^x-4)$		+	0	-	0	+	

finalement $e^{2x}+8\geqslant 6e^x \Leftrightarrow x\in]-\infty,\ln(2)]\cup[\ln(4),+\infty[$